Calcolo

Piccole dritte per capire la matematica che studiamo a scuola

Giovanni Liveri

Calcolo

Piccole dritte per capire la matematica che studiamo a scuola

Giovanni Liveri

Calcolo- Piccole dritte per capire la matematica che studiamo a scuola

I edizione digitale © 2016

E mail: giovanniliveri@libero.it

Brevi lezioni di Elettronica, Fisica e Matematica


Giovanni Liveri
Sette
brevi
lezioni di
Elettronica


Sette brevi
lezioni di
Elettronica 2
Giovanni
Liveri


Giovanni Liveri
Sette
brevi
lezioni di
Elettronica
3


Giovanni Liveri
Le Leggi di
Ohm e Joule
Sette
brevi
lezioni di
Elettronica
4


Dagli elettroni
all'Elettronica
Giovanni Liveri


Fisica
Quantistica
Giovanni Liveri


La Fisica che
conosciamo 1
Giovanni Liveri


Giovanni Liveri
Relatività
ristretta
Brevi lezioni per
cominciare


Einstein
Giovanni Liveri


La Fisica che
conosciamo 2
Gravità e attrito
Giovanni Liveri

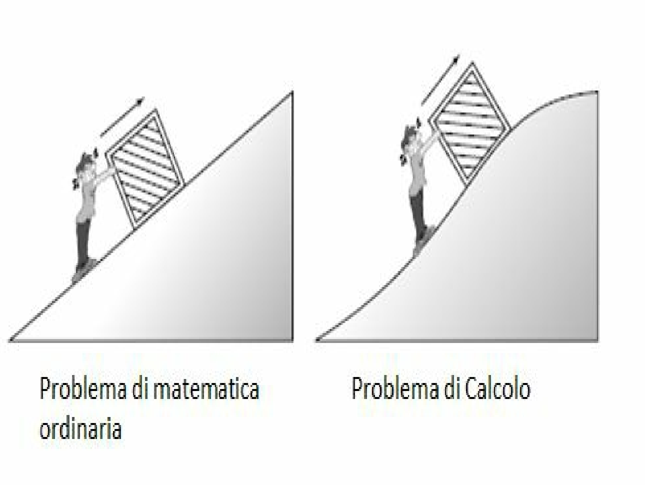

GIOVANNI LIVERI
SETTE
BREVI
LEZIONI DI
MATEMATICA
Statistica e
probabilità

Sommario

Lezione 1

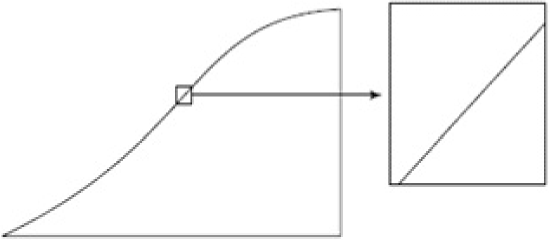
Che cos'è il Calcolo?

Che cos'è il Calcolo? Bella domanda. Che, ovviamente, merita una risposta semplice e concisa. Il Calcolo non è altro che un mix di algebra e geometria, però a un livello un tantino più avanzato. Quindi, in un certo senso, non si tratta di un qualcosa di completamente nuovo rispetto a quest'ultime: esso prende le consuete regole utilizzate in algebra e geometria e dona loro quel pizzico di cui mancano per poter essere utilizzate nella risoluzione di problemi più complicati(il guaio è che, visto in un certo altro senso, si tratta pur sempre di un oggetto di studio nuovo e più complicato!). Cerchiamo di capire cosa intendiamo utilizzando un semplice esempio grafico:



A sinistra abbiamo un uomo che tenta di spingere una cassa su per un **piano** inclinato. Sulla destra, invece, abbiamo sempre lo stesso uomo che cerca di spingere sempre la medesima cassa su per una pendenza curvilinea. Il problema è, in entrambi i casi, quello di determinare quanta energia sia necessaria per spingere la cassa fino in cima. Il problema a sinistra lo si può risolvere utilizzando la semplice matematica. Per quello sulla destra, invece, c'è bisogno del Calcolo(sempre che non si conoscano delle scorciatoie Fisiche per giungere al medesimo risultato!). Lungo il piano inclinato, riportato sulla sinistra della figura precedente, l'uomo continua a spingere sempre con forza **immutata**, e la scatola percorre la pendenza con **immutata** rapidità. Con l'ausilio di qualche formula fisica e di un po' di semplice matematica(essenzialmente trigonometria e algebra), è possibile calcolare quante calorie di energia siano richieste per spingere la cassa fino in cima. Chiaramente, l'ammontare di energia spesa, in tal caso, rimarrà ogni secondo lo stesso. Per quanto riguarda la pendenza curvilinea, d'altro canto, le c o s e **cambiano** costantemente. La ripidità dell'inclinazione **cambia**, e purtroppo non è un qualcosa del tipo "abbiamo una ripidità per i primi 3 metri, poi ne abbiamo una differente per i successivi 3, e via discorrendo". No. La ripidità , in tal caso, **cambia costantemente**. E considerate, inoltre, che il pover uomo è costretto a spingere con una forza **costantemente mutevole**

: maggiore è l’inclinazione, più intensa sarà la forza da imprimere sulla cassa. Come conseguenza di ciò, anche l’ammontare di energia spesa cambierà, e non soltanto ogni secondo o millesimo di secondo, ma lo farà costantemente, da un momento a quello successivo. Questo è ciò che lo rende un problema di Calcolo. Non bisogna quindi stupirsi se il Calcolo viene anche definito “la matematica del cambiamento”. Il Calcolo prende le regole della matematica ordinaria e le applica a problemi fluidi, in evoluzione. Per il problema in cui è coinvolta la pendenza curvilinea, le formule fisiche rimangono le medesime, e sono uguali anche l’algebra e la trigonometria che vengono utilizzate. La differenza è che, rispetto al problema che coinvolge una pendenza rettilinea, che può essere risolto in un sol colpo e semplicemente, in questo caso bisogna scindere il problema in piccoli pezzettini e trattare ogni singolo pezzo separatamente. Di seguito mostriamo una piccola porzione dell'inclinazione curvilinea , ingrandita tante volte.



Problema di Calcolo

Quando si "zoomma" abbastanza, la piccola porzione di inclinazione curvilinea originaria diviene praticamente rettilinea. Perciò, in tal caso, sarà possibile risolvere tale piccolo pezzettino allo stesso modo del problema dell' inclinazione rettilinea. Chiaramente, ogni singolo pezzettino potrà essere risolto agendo allo stesso modo e alla fine ciò che si dovrà fare sarà soltanto sommare tutti i contributi ottenuti. Questo è il Calcolo in poche parole. Esso prende un problema che non può essere risolto con la matematica ordinaria perché le cose cambiano costantemente(tali quantità che cambiano si materializzano su di un grafico come delle curve), "zoomma" sulla curva fino a quando essa non diventi rettilinea e alla fine porta a compimento il problema utilizzando la normale matematica. Ciò che rende il Calcolo uno straordinario raggiungimento umano, è che esso è in grado di fare ciò che sembrerebbe impossibile: ovvero "zoommare" fino all'infinito. Come dato di fatto, ogni cosa nel Calcolo coinvolge l'infinito, in un senso o in un altro, perché se qualcosa cambia costantemente essa cambia infinite volte da ogni momento infinitesimo al successivo.

Lezione 2

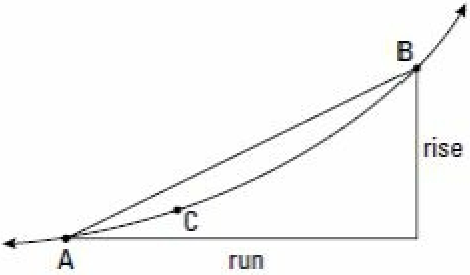
Esempi di Calcolo dal mondo reale.

Fin qui abbiamo appreso come con la matematica ordinaria sia possibile risolvere il problema dell'inclinazione rettilinea; con il Calcolo, invece, riusciremmo a risolvere anche quello dell'inclinazione curvilinea. Ad esempio, con la matematica normale saremmo in grado di determinare la lunghezza di un cavo sepolto sotto l'asfalto che percorra la diagonale da un angolo di un parco all'altro(ricordate il Teorema di Pitagora?). Con il Calcolo, invece, sarà possibile determinare la lunghezza di un cavo sospeso fra due torri che assuma una forma a U(il che è differente da un semplice arco o da una semplice parabola). Ovviamente, conoscerne l’esatta lunghezza sarebbe importante per un’azienda di fornitura di energia elettrica che stesse progettando centinaia di migliaia di metri di nuovi cavi elettrici! Altro esempio. È possibile calcolare l’area del tetto piano di un’abitazione utilizzando la matematica normale. Con il Calcolo è possibile, invece, calcolare l’area di una forma più complicata , non sferica, come la cupola che ricopre un grosso stadio al coperto. Gli architetti ovviamente avrebbero bisogno di conoscere l’area della cupola per determinarne il costo dei materiali e per capire quale sia il peso della cupola stessa(con o senza neve ad esempio). Il peso, di certo, sarebbe necessario per progettare la forza che le strutture di sostegno dovrebbero fornire. Con la normale matematica e con un pizzico di fisica, è possibile calcolare quale sia ad esempio l'esatta direzione che un quarterback debba imprimere alla palla per raggiungere un ricevitore che stia correndo lungo una linea retta a velocità costante. Tuttavia , quando la NASA, nel 1975, dovette calcolare quale fosse la direzione necessaria affinchè la Viking I colpisse Marte, ebbe bisogno di utilizzare il Calcolo perché entrambi, Terra e Marte, viaggiano lungo orbite ellittiche, e le velocità di entrambi cambiano costantemente(senza considerate il fatto che, lungo la propria rotta verso Marte, la navicella spaziale sarebbe stata affetta da differenti e sempre mutevoli spinte gravitazionali dovute alla Terra, alla Luna , a Marte e al Sole).

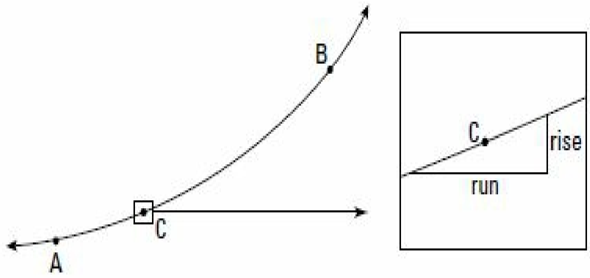
Lezione 3

Differenziazione.

La differenziazione è la prima grande idea introdotta dal Calcolo. È il processo che prevede di trovare una derivata di una curva. E la derivata è soltanto il termine fittizio usato nel Calcolo per indicare la pendenza di una curva. In algebra abbiamo già imparato che la pendenza di una linea è uguale al rapporto fra le due "r": "rise" e "run". Vediamo un esempio grafico:



Nella figura precedente , si può notare come il “rise” sia metà del “run”, cosicchè il segmento AB avrà una pendenza pari a ½. Su una curva, la pendenza cambia costantemente, perciò c’è bisogno del Calcolo per risolvere il complicato problema di determinarla. La pendenza del segmento AB è la medesima in ogni punto compreso fra A e B. Tuttavia, considerando la curva, la sua ripidità cambia nell’intervallo compreso fra gli stessi due punti. Nel punto A la curva è meno ripida rispetto al segmento, mentre nel punto B la curva è più ripida del segmento stesso. Quindi, alla fine, cosa bisognerebbe fare qualora si volesse determinare la pendenza della curva nel punto C , ad esempio? Iniziamo a “zoommare”. Osserviamo graficamente ciò che verrebbe a succedere:



Qualora “zoommassimo” tanto(in realtà lo dovremmo fare infinitamente!), il minuscolo pezzo di curva sotto i riflettori diverrebbe in pratica rettilineo, e quindi sarebbe possibile determinarne la pendenza alla vecchia maniera

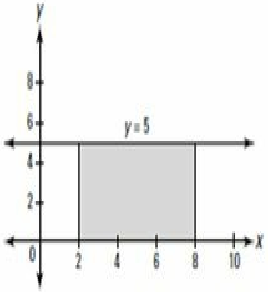
.Questo è il modo in cui funziona la differenziazione.

Lezione 4

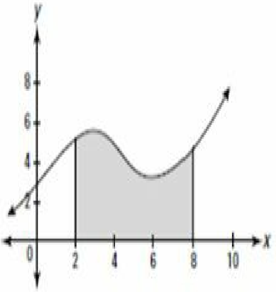
Integrazione.

L’integrazione, la seconda grande idea introdotta dal Calcolo, è fondamentalmente e molto semplicemente una somma. Essa è il processo che prevede di suddividere un’area in tante piccole porzioni, trovare le rispettive aree, e alla fine sommarle tutte quante assieme per determinare l’area complessiva. Di seguito rappresentiamo due problemi di determinazione di area, uno che può essere risolto con la geometria e l’altro per cui c’è bisogno del Calcolo.

Problema di geometria:
Quanto vale l'area ombreggiata?

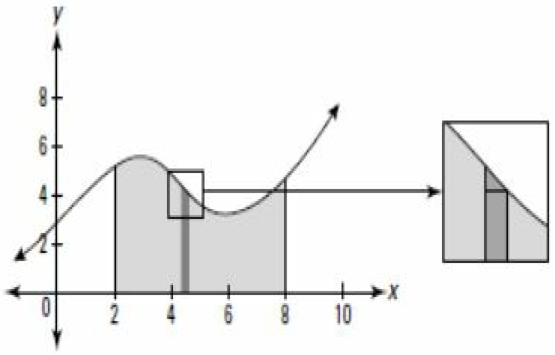


Problema di calcolo:
Quanto vale l'area ombreggiata?



La forma ombreggiata riportata a sinistra è un semplice rettangolo. La sua area, quindi, sarà pari alla lunghezza per la larghezza. Tuttavia, non è possibile determinare, utilizzando la normale geometria, l'area riportata sulla destra.

Non esiste, infatti, alcuna formula che si possa applicare a questa strana forma. Perciò, cosa fare? Perché non "zoommiamo" anche questa volta? Ovviamente è la cosa giusta da fare . Nella figura seguente riporteremo la porzione superiore di una stretta strisciolina della strana figura di cui sopra, ingigantita molte volte.

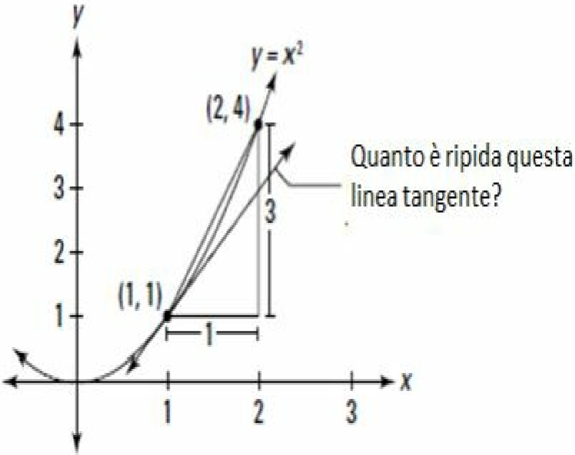


Quando si “zoomma”, la curva diventa praticamente rettilinea , e chiaramente più si ingrandisce più rettilinea diventa. Alla fine si arriva alla forma riportata a destra nella figura precedente: un ordinario trapezio, oppure un triangolo se ci soffermiamo sulla figura che sovrasta quest’ultimo. Dal momento che è possibile calcolare l’area del triangolo , del rettangolo e del trapezio, con la normale geometria, è possibile altresì ottenere l’area di tale strisciolina e di tutte le altre, che allo stesso modo verrebbero fuori, e alla fine sommarle tutte quante per ottenere quella totale dell’intera zona ombreggiata. Questa è l’integrazione.

Lezione 5

Limiti: i microscopi matematici.

La matematica dei limiti è il microscopio attraverso cui riusciamo a "zoommare" su una curva. Immaginiamo di voler determinare l'esatta pendenza di una parabola nel punto di coordinate (1,1). Diamo un'occhiata alla figura seguente:

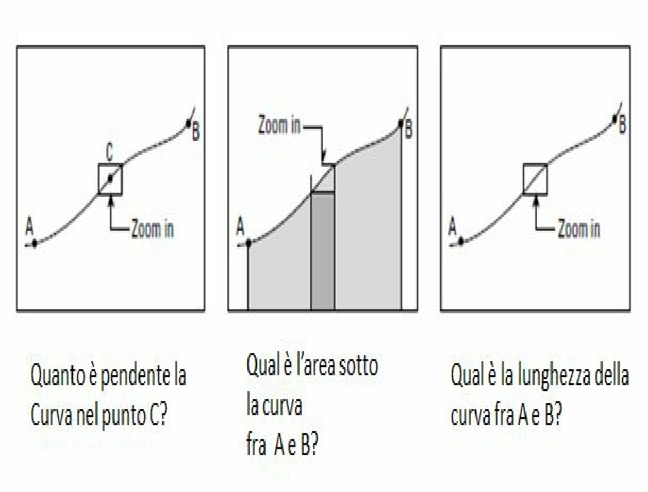


Utilizzando la formula della pendenza derivante dall'algebra, è possibile calcolare la pendenza della linea compresa fra i due punti (1,1) e (2,4): si avanza verso destra di 1 e verso l'alto di 3, quindi la pendenza è pari a 3/1, ovvero 3. Tuttavia, dalla figura si può notare come tale linea sia più ripida della linea tangente al punto (1,1), che è ciò che mostra la pendenza della parabola in quel punto. Il processo del limite ci consente in pratica di far scorrere il punto che parte dalle coordinate (2,4) giù verso il punto (1,1) finchè non sia un millesimo di millimetro distante da esso, poi un milionesimo, poi ancora un miliardesimo e così via, giù fino ad entrare nella scala microscopica. Operando matematicamente, le pendenze fra il punto (1,1) e il nostro punto mobile apparirebbero come qualcosa del genere: 2.001, 2.000001, 2.000000001, e così via. E con la magica matematica dei limiti, è possibile concludere che la pendenza della curva nel punto (1,1) è esattamente pari a 2, anche se il nostro punto mobile non raggiungerà mai le coordinate (1,1)(se così fosse ci rimarrebbe soltanto un punto e noi abbiamo bisogno di 2 punti separati per poter utilizzare la formula della pendenza). La matematica dei limiti è tutta basata su tale processo di ingrandimento e funziona, una volta ancora, perchè più si ingrandisce più la curva diventa simile ad una rettilinea.

Lezione 6

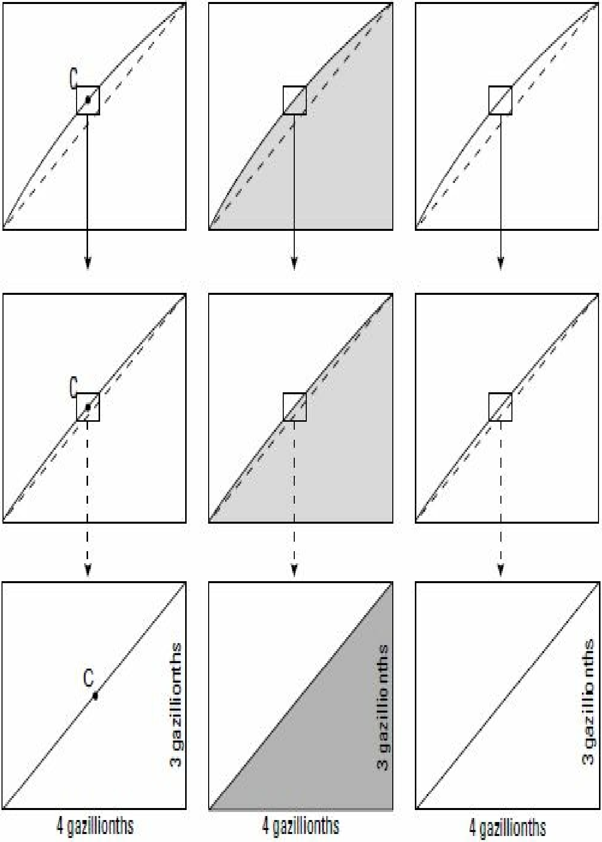
Cosa accade quando si effettua un ingrandimento?

Mostriamo subito una figura raffigurante tre diagrammi di una curva e tre cose che potremmo voler conoscere di essa:



È impossibile rispondere alle tre

domande utilizzando la matematica ordinaria, perché le formule della normale matematica per il calcolo della pendenza, dell'area e della lunghezza funzionano soltanto per linee rette(e semplici curve come i cerchi), ma non per strane forme come quella su cui stiamo concentrando la nostra attenzione. Analizziamo la seguente figura:



C
C
C
3 gazillionths
4 gazillionths
3 gazillionths
4 gazillionths
3 gazillionths
4 gazillionths

La prima riga raffigura una versione ingrandita dei tre diagrammi riportati precedentemente. La seconda, riporta un ulteriore ingrandimento. Ciascun ingrandimento rende la curva sempre più rettilinea e vicina alla linea diagonale. Tale processo viene portato avanti indefinitamente. Alla fine, la riga in basso mostra i risultati dopo un infinito numero di ingrandimenti. Immaginiamo i numeri 3 e 4 riportati come 3 e 4 milionesimi di millimetro, anzi 3 e 4 miliardesimi, anzi trilionesimi, anzi 3 e 4 fantamilionesimi(usiamo la terminologia inglese perché è molto più cool!). Dopo averla ingrandita un numero infinito di volte , la curva è diventata perfettamente rettilinea e ora le formule della matematica ordinaria funzionano perfettamente. Per il diagramma a sinistra è ora possibile utilizzare la formula dell'algebra per il calcolo della pendenza per trovare, appunto, la pendenza della curva nel punto C. Essa è esattamente pari a ¾. Questa è la risposta al primo quesito. E questo è il modo in cui funziona la differenziazione. Per il diagramma nel mezzo, la normale formula per il triangolo fornita dalla geometria ci darà un'area pari a 6. Perciò, per ottenere l'area dell'intera zona ombreggiata della figura precedente basterà aggiungere l'area del sottile rettangolo posto sotto al triangolino e ripetere tale processo per tutte le altre strette striscioline che allo stesso modo si potranno ottenere; alla fine, ovviamente, bisognerà sommare tutte quante le microaree così ottenute. Questo è il modo in cui funziona l'integrazione. Per il diagramma sulla destra, la geometria del teorema di Pitagora ci fornisce una lunghezza pari a 5. Poi , per determinare la lunghezza totale della curva compresa fra i punti A e B, basterà fare la stessa cosa per tutte le altre minute sezioni della curva stessa e alla fine sommare tutte le minuscole lunghezze così ottenute. Questo è il modo in cui calcolare la lunghezza di un arco. Quindi

, in definitiva, il Calcolo utilizza il processo di limite per effettuare ingrandimenti su una curva finchè essa non appaia rettilinea. Dopo che essa è diventata rettilinea tutte le regole della vecchia cara matematica si possono applicare. Il Calcolo quindi dona all'ordinaria algebra e geometria il potere di gestire problemi complicati che coinvolgono quantità in mutamento(che graficamente sono sintetizzate dalle curve). Ciò spiega il motivo per cui il Calcolo possiede così tanti utilizzi pratici, perché di una cosa si può essere certi nella vita, a parte la morte e le tasse da pagare ovviamente, ovvero che ogni cosa è in costante cambiamento.