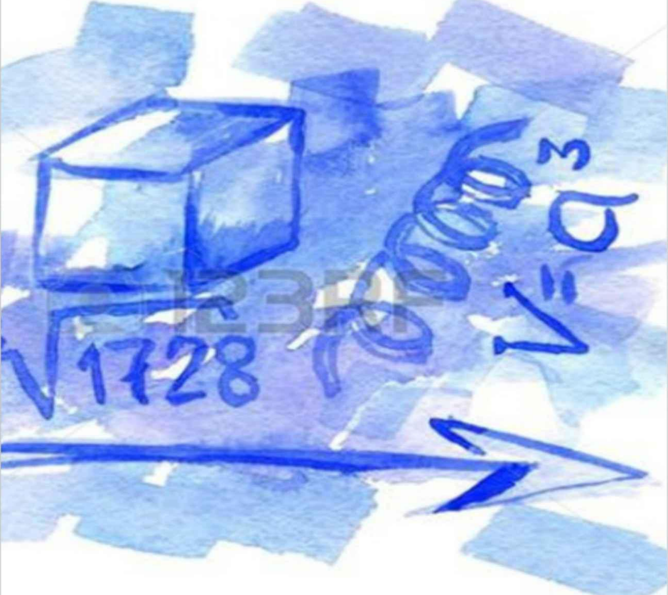
Vi insegno Io la Matematica



Giovanni Liveri

Vi insegno Io la MATEMATICA

Come diventare esperti matematici in meno di 1 giorno

Giovanni Liveri

Vi insegno Io la MATEMATICA – Come diventare esperti matematici in meno di 1 giorno.

I edizione digitale © 2017

E mail: giovanniliveri@libero.it

Brevi lezioni di Elettronica, Fisica e Matematica


Giovanni Liveri
Sette brevi lezioni di Elettronica
Sette brevi lezioni di Elettronica 2
Giovanni Liveri
Giovanni Liveri
Sette brevi lezioni di Elettronica 3
Giovanni Liveri
Le Leggi di Ohm e Joule
Sette brevi lezioni di Elettronica 4
Dagli elettroni all' Elettronica
Giovanni Liveri
Fisica Quantistica
Giovanni Liveri
La Fisica che conosciamo 1
Giovanni Liveri
Giovanni Liveri
Relatività ristretta
Brevi lezioni per cominciare
Einstein
Giovanni Liveri
La Fisica che conosciamo 2
Gravità e attrito
Giovanni Liveri
GIOVANNI LIVERI
SETTE BREVI LEZIONI DI MATEMATICA
Statistica e probabilità
Calcolo
Giovanni Liveri
Fisica Quantistica in 10 minuti
Giovanni Liveri
FISICA QUANTISTICA
Esposizione divulgativa
Giovanni Liveri

Sommario

Introduzione

Vi starete chiedendo se esista un trucchetto per diventare esperti matematici in pochissimo tempo. Dal momento che io non sono Wanna Marchi, vi dirò subito che nessuno vi regala niente nella vita e che si diventa bravi soltanto lavorando sodo e impegnandosi. “Che fregatura”, starete pensando. Però, ebbene sì esiste un però, io ho una soluzione. Richard Feynman, uno dei più grandi fisici del ventesimo secolo, sosteneva che il Calcolo(ovvero la matematica delle derivate, dei limiti, degli integrali, per intenderci) è il linguaggio parlato da

Dio. Ora , io non sono nella posizione di confermare o negare il pensiero di Feynman, nonostante l'enorme stima che nutra nei confronti di tale figura leggendaria, però posso assicurarvi che l'Algebra è il linguaggio tramite cui si esprime il Calcolo. Quindi, avrete già capito le mie intenzioni, se volete imparare a parlare nei termini del creatore di tutto ciò che esiste, è esistito ed esisterà, dovete per forza conoscere l'Algebra e tutto ciò che ad essa è in qualche modo legato. Sappiate subito che non potrete mai masticare il Calcolo(ovvero il linguaggio di Dio) senza prima conoscere l'Algebra, un po' come non potrete mai scrivere una poesia in Cinese senza prima conoscere il Cinese. Tutto qui. Si fa per dire, ovviamente. Adesso bisogna cominciare a rimboccarsi le maniche. Vamos!

FRAZIONI

Introduzione

Provate ad aprire un qualsiasi libro di matematica. Una qualsiasi pagina, in maniera casuale. Molto probabilmente incapperete in una frazione. Non c'è modo di scappare. Bisogna per forza conoscere le frazioni, se si vuole diventare degli esperti matematici. E, gestire le frazioni, significa conoscere una manciata di regoline.

Alcune regole estremamente immediate.

La prima regola è molto semplice ma estremamente importante perché, praticamente, la ritroverete dappertutto nel mondo matematico e principalmente del Calcolo(che vi ricordo essere il linguaggio di Dio, se ancora non lo avete recepito:>).

1) **Non è possibile dividere per zero!**

Ovvero, il denominatore di una frazione non può essere mai pari a zero.

Quindi :

$\frac{0}{5}$ è uguale a zero

$\frac{5}{0}$ è indefinito

È molto semplice capire perché $\frac{5}{0}$ sia indefinito. Basta considerare il modo in cui funzionano le frazioni. Vediamo un esempio:

$$\frac{8}{4} = 2$$

Tale frazione ci dice che, ovviamente, il 4 sta nell'8 due volte. In altre parole:

4+4=8. Bene. Allora , tornando alla nostra frazione indefinita, la domanda da porci sarebbe: quanti zeri avremmo bisogno di sommare fra loro per ottenere 5? Ovviamente, la risposta è “non si può fare”. Per cui, non è possibile dividere 5(o qualsiasi altro numero) per zero.

Passiamo alla seconda regoletta.

2) **Definizione di reciproco**: il reciproco di un numero oppure di una espressione è il suo “inverso moltiplicativo” – il che è una parola molto carina che significa che il prodotto fra qualcosa e il suo inverso è pari ad 1.

Per ottenere il reciproco di una frazione basta semplicemente capovolgerla. Per cui:

1) Il reciproco di $\frac{4}{3}$ è $\frac{3}{4}$

2) Il reciproco di 6 ,che è pari a $\frac{6}{1}$, è uguale a $\frac{1}{6}$

3) Il reciproco di x+2 è pari a $\frac{1}{x+2}$

Moltiplicare le frazioni.

Sommare è, il più delle volte, molto più semplice che moltiplicare. Ebbene, per le frazioni vale esattamente il contrario. Questo è il motivo per cui partiremo col parlare della moltiplicazione.

Moltiplicare frazioni è tanto immediato quanto uno schiocco di dita. Spero di aver reso l'idea! Basterà, infatti, moltiplicare fra loro tutto ciò che si trova al piano superiore (ovvero i rispettivi numeratori) e tutto ciò che si trova al piano inferiore (ovvero i denominatori). Complicato? Vediamo immediatamente un paio di esempi e tutto risulterà semplice e lineare:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Dividere le frazioni.

La divisione fra frazioni, rispetto alla moltiplicazione, possiede un passaggio aggiuntivo: bisogna capovolgere la seconda frazione e successivamente effettuare la moltiplicazione. Non si è capito nulla? Come al solito, un pratico esempio renderà tutto quanto più chiaro:

$$\frac{3}{10} \div \frac{4}{5}$$
$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{40}$$
$$= \frac{3}{8}$$

Ci sono due cose da notare,

relativamente all’esempio precedente:

1) Avremmo potuto effettuare le semplificazioni prima di effettuare la moltiplicazione. Scritto altrimenti:

$$\frac{3}{{}_{2}\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{4} = \frac{3}{8}$$

2) Avremmo potuto scrivere il problema originario nel modo seguente:

$$\frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{5}}$$

Sommare le frazioni.

Probabilmente saprete già che:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$$

Ovvero, è possibile eseguire la somma in tale maniera, perché le frazioni da sommare possiedono già un comune denominatore. Ovviamente, funziona allo stesso modo per le variabili:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Dai due esempi precedenti, è possibile estrapolare un principio molto potente da utilizzare in matematica:

“Le variabili si comportano sempre

alla stessa maniera dei numeri”

Infatti, laddove nella prima equazione, quella numerica, troviamo un 2 nella parte alta, avremo invece una “a” nell’equazione con variabili; laddove nella prima equazione compare 3 in alto, avremo nella seconda una “b”; stesso discorso per il 7 al denominatore e per la “c” nella seconda equazione.

Quindi, ogni qualvolta vi chiedeste cosa fare delle variabili all’interno di un problema, provate a chiedervi come evolverebbe il vostro problema se al posto delle variabili ci fossero dei numeri. E, alla fine, risolvete il problema con le variabili esattamente allo stesso modo che con i numeri. Tutto qui. Vediamo un altro esempio:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Non è possibile sommare tali due frazioni nello stesso modo visto in precedenza perché non abbiamo, in tal caso, un denominatore comune. Ipotizziamo di esse totalmente confusi e di voler ragionare in termini numerici. Benissimo, immaginiamo di voler sommare le due seguenti frazioni numeriche:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$$

1) Per prima cosa, determiniamo il **minimo denominatore comune**(in realtà qualsiasi denominatore comune

funzionerebbe ma a noi interessa il più piccolo per praticità di calcolo), dato che noi sappiamo sommare soltanto frazioni con denominatori uguali. Dopodichè, convertiamo le due frazioni.

2) Il minimo comune denominatore è 5 moltiplicato 8, ovvero 40, per cui convertiamo le due frazioni in 40esimi:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{5}$$

$$=\frac{2\cdot 8}{5\cdot 8}+\frac{3\cdot 5}{5\cdot 8}$$

3) A questo punto, sommiamo fra

loro i numeratori, mantenendo inalterato il comune denominatore:

$$= \frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 8}$$

Adesso potete tornare al vostro problema di partenza, quello con le variabili:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

In tale problema, al posto del 2 avrete la “a”: al posto del 5 avrete la “b”; al posto del 3 avrete la “c”; al posto dell’8 avrete la “d”. E’ un po’ come se ciascun numero dell’equazione numerica precedente si trovasse su una faccia di una moneta e sull’altra faccia si avesse la lettera corrispondente. Ad esempio, ci sarebbe una moneta con un 2 stampato su un lato e una “a” sull’altro lato. Alla fine, quindi, la soluzione finale al nostro quesito con le variabili sarebbe:

$$\frac{ad + cb}{bd}$$

Sottrarre le frazioni.

La sottrazione fra frazioni funziona esattamente come la somma. L’unica differenza, risiede nel fatto che, invece di sommare, bisogna sottrarre. Tutto qui. Non potete capire quanta soddisfazione mi dia la matematica quando si riesca a spiegare una faccenda apparentemente complicata in 4 righe. Bene così!

Frazioni e semplificazioni!

La semplificazione è una parte integrante dell'Algebra e, molto spesso, rappresenta l'ultimo e soddisfacente step verso la risoluzione di un problema matematico. Ovviamente, ciò di cui bisogna aver cura è sapere come si esegua la semplificazione e, soprattutto, quando si possa e non possa fare. Vediamo subito un esempio. Nella frazione seguente:

$$\frac{x^5 y^2}{x^3 z}$$

3 “x” presenti al numeratore e denominatore possono essere letteralmente cancellate, dando come risultato finale la seguente frazione:

$$\frac{x^2y^2}{z}$$

Il motivo di tale lecita operazione risulta chiaro se scriviamo ogni singola “x”, invece di raggrupparle utilizzando la notazione esponenziale. Vale a dire:

$$\frac{x^5y^2}{x^3z}=\frac{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y}{x\cdot x\cdot x\cdot z}$$

Ora, cancellando 3 “x” dal numeratore e denominatore, rispettivamente, otterremo:

$$\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot z}$$

Il che ci lascia in mano il risultato finale:

$$\frac{x\cdot x\cdot y\cdot y}{z}$$

Ovvero:

$$\frac{x^2y^2}{z}$$

Le espressioni algebriche.

Un'**espressione algebrica** , altrimenti detta **espressione,** è qualcosa del tipo:

$$xyz$$

oppure

$$a^2p^3\sqrt{q}-6,$$

Essenzialmente, possiamo considerare un'espressione, ogni cosa che sia priva di un segno uguale(perché se ha un segno uguale allora si tratta di un'**equazione**). E , per le espressioni, la semplificazione funziona allo stesso modo visto in precedenza per le variabili. Partiamo subito con un aiutino. Quest'ultimo ha senso non soltanto nel caso della semplificazione, ma in generale in tutti gli argomenti legati all'algebra, in generale:

"Le espressioni si comportano sempre in maniera eguale alle variabili"

Per cui, stando al mantra appena appreso, se nel precedente problema sostituissimo tutte quante le "x" con (xyz-q), otterremmo:

$$\frac{(xyz-q)^5 y^2}{(xyz-q)^3 z}$$

E , anche in tale secondo caso, tre delle espressioni (xyz-q) verrebbero cancellate dal numeratore e denominatore, così come accaduto per le vecchie “x”. Il risultato semplificato finale sarà:

$$\frac{(xyz-q)^2 y^2}{z}$$

La regola della moltiplicazione per effettuare le semplificazioni.

Finora abbiamo visto <u>come</u> semplificare. Ci resta soltanto da capire <u>quando</u> possiamo effettuare le semplificazioni. A questo punto lanciamo immediatamente una regoletta magica che ci consenta di non sbagliare:

La regola della moltiplicazione: "E' possibile semplificare, all'interno di una frazione, soltanto quando sia presente una <u>catena di moltiplicazioni ininterrotta</u>

lungo l'intero numeratore e l'intero denominatore."

Qualora non fosse ancora chiara la regoletta, vediamo immediatamente un esempio per chiarirci definitivamente le idee. Il processo di semplificazione è possibile all'interno di una frazione siffatta:

$$\frac{a^2b^3(xy-pq)^4(c+d)}{ab^4z(xy-pq)^3}$$

In maniera molto spartana e pratica, provate a pensare alla moltiplicazione come a un qualcosa che conduca elettricità. La corrente elettrica può fluire da una estremità del numeratore all'altra, da a^2 a (c+d) per intenderci, perché tutte le variabili e tutte le espressioni sono collegate tramite moltiplicazioni(da notare come un segno + o – presente all'interno di una parentesi, come il + che si trova all'interno dell'espressione (c+d), non rompono il flusso di corrente). Dal momento che anche il denominatore è composto da una catena ininterrotta di moltiplicazioni, l'operazione di semplificazione è concessa. In particolare, è possibile cancellare da numeratore e denominatore rispettivamente: una "a", tre "b" e tre espressioni (xy-pq). Ed ecco il risultato finale:

$$\frac{a(xy-pq)(c+d)}{bz}$$

Quando non è possibile semplificare, invece? Basterà, ad esempio, aggiungere al numeratore (o denominatore) della frazione originaria, un innocuo 1, per cambiare tutto quanto:

$$\frac{a^2b^3(xy-pq)^4(c+d)+1}{ab^4z(xy-pq)^3}$$

Il segno di addizione di fronte all'1 rompe letteralmente la "corrente elettrica" e nessuna semplificazione è consentita all'interno dell'intera frazione.

VALORE ASSOLUTO

Assolutamente semplice!

I l **valore assoluto,** semplicemente, trasforma un numero negativo in uno positivo(ovviamente il numero è sempre lo stesso!). Esso, invece, non fa assolutamente niente ai numeri positivi e allo zero. Vediamo tre esempi:

$$|-6| = 6, \quad |3| = 3, \quad |0| = 0$$

Quando, invece, trattiamo variabili, la questione del valore assoluto diventa un tantino più complicata.

Se x è zero oppure positivo, allora le barrette del valore assoluto non hanno alcun effetto su di esso:

$$|x| = x$$

Tuttavia, se x è negativo, il valore assoluto di x è positivo e scriveremo:

$$|x| = -x$$

Ad esempio, se x=-5 allora:

$$|-5| = -(-5) = 5$$

Ricordate sempre una cosa: **-x può essere un numero positivo**. Infatti, quando x è un numero negativo, allora -x(ovvero l'opposto di x, oppure il negativo di x) sarà positivo. Tutto qui. Non c'è altro da sapere sul valore assoluto per diventare degli esperti matematici!

POTENZE

Sfoderiamo le nostre “potenze”!

Sappiate una cosa: nel Calcolo (che ricordo essere il linguaggio di Dio!) risulterete essere deboli e impotenti se dimostrerete di <u>non</u> conoscere le regole che governano le potenze. Per cui, dovrete farvene una ragione e imparare a gestirle. La cosa positiva è che si tratta di nulla di trascendentale e complicato. Passiamo in rassegna, una ad una, ogni singola regola:

1) $x^0 = 1$

Tale regola è valida indipendentemente

da ciò a cui x è uguale – sia esso una frazione, un negativo, qualsiasi cosa – eccetto, però, lo zero(infatti zero elevato alla potenza zero è un qualcosa di indefinito). Quindi , in definitiva, $(\text{qualsiasi cosa eccetto lo zero})^0 = 1$

.

2) $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ e $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

Ad esempio: $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$. Si tratta di un risultato davvero notevole! Notate, infatti, che nonostante l'esponente sia negativo, il risultato è $\frac{1}{16}$, ovvero non negativo.

3) $$x^{2/3} = (\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}$$ **e** $$x^{a/b} = (\sqrt[b]{x})^a = \sqrt[b]{x^a}$$

Questa regola risulta molto utile nel caso si voglia trasformate un problema di radici in uno, molto più semplice, di potenze.

4) $$x^2 * x^3 = x^5$$ **e** $$x^a * x^b = x^{a+b}$$

In tal caso si **sommano** gli esponenti e non le intere potenze. Vale a dire, non è possibile sommare fra loro x^2 e x^3 perché trattasi di termini **differenti.**

Come regola da tenere a mente, è possibile sommare o sottrarre fra loro dei termini, soltanto quando le rispettive parti variabili sono identiche. Ad esempio: 3xyz + 4xyz=7xyz. È esattamente la stessa cosa di dire che 3 sedie + 4 sedie è uguale a sette sedie; tuttavia non è possibile sommare fra loro termini non simili, come ad esempio 3 sedie e 5 macchine.

5) $\frac{x^5}{x^3} = x^2$ **e** $\frac{x^2}{x^4} = x^{-2}$ **e** $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

In tal caso si **sottraggono** gli esponenti.

6) $(x^2)^3 = x^6$ **e** $(x^a)^b = x^{a * b}$

In questo caso si **moltiplicano** gli esponenti.

7) $(xyz)^2 = x^2 y^2 z^2$ **e** $(xyz)^a = x^a y^a z^a$

In tal caso, l'esponente si **distribuisce** su ciascuna variabile.

8) $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$ **e** $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

Anche in questo caso l'esponente viene distribuito su ciascuna variabile.

9) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ **NO**

NO NO

In tal caso NON si distribuisce l'esponente. L'approccio corretto è moltiplicare, per se stesso, il contenuto delle parentesi tonde:

$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+xy+y^2=x^2+2xy+y^2$$

Guardate cosa accadrebbe se utilizzassimo, ERRONEAMENTE, la regola precedente con i numeri $(3+5)^2$, il che è ovviamente uguale a 8^2, ovvero 64. Dalla formula precedente verrebbe fuori $3^2+5^2=9+25=$**34**. Il che è estremamente errato!

RADICI

Introduzione.

Le radici, specialmente quelle quadrate, si ritrovano praticamente dappertutto all’interno del Calcolo e in generale della Matematica. Per tale motivo, sapere come funzionano e conoscere lo stretto legame che esse hanno con le potenze è essenziale e fondamentale per una completa comprensione e padronanza della materia matematica.

Le regole delle radici.

Partiamo col dire che ogni radice può essere convertita in una potenza. Ad esempio:

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$\sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$$

Per cui, avendo a che fare con un problema che contenga radici, si può benissimo convertire ciascuna radice in potenza e utilizzare le regole viste in precedenza, anziché cercare di risolvere un problema molto più complicato (tra l’altro questa è una tecnica molto utile e intelligente da adottare in tutti i casi si renda necessario!). Avendo a disposizione tale utile opzione, è ovvio che le regole delle radici risultano essere meno fondamentali e importanti rispetto a quelle delle potenze. Ad ogni modo, è sempre bene conoscere anche quest’ultime. Passiamole in rassegna:

1) $\sqrt{0} = 0$ **e** $\sqrt{1} = 1$

Ma questo, probabilmente già lo sapevate!

Non sono invece consentiti numeri negativi al di sotto di radici pari. Ovvero, non si può avere un numero negativo sotto una radice quadrata o sotto qualsivoglia altra radice dal numero pari. Perlomeno questo è quanto vale per il **Calcolo base.**

2) $\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{a * b}$, $\sqrt[3]{a} * \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a * b}$, $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$

3) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$ **e** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Come potete vedere, basta moltiplicare i due indici di radice.

5) $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, $\sqrt[6]{a^6} = |a|$ **, e così via**

Qualora si abbia un indice di radice pari, c'è bisogno del valore assoluto a racchiudere il risultato, dal momento che, sia che "a" sia positivo sia che sia negativo, il risultato sarà sempre positivo. Se , invece, l'indice di radice è dispari, non ci sarà bisogno di alcun valore assoluto. Per cui:

6) $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[5]{a^5} = a$ **, e così via.**

7) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ **NO NO NO**

Fate il precedente errore e andrete direttamente in prigione senza passare dal via! Proviamo a risolvere utilizzando dei numeri:

$$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

e NON 2+3=5.

Semplificare le radici.

Arrivati a questo punto, non ci resta che vedere l'ultimo paio di cose riguardo alle radici e al loro mondo. Per primo, c'è bisogno di conoscere i due metodi utilizzati per semplificare radici come $\sqrt{300}$ oppure $\sqrt{504}$. Il metodo "veloce", fra i due, funziona bene per $\sqrt{300}$, dal momento che è facilmente individuabile un grosso quadrato perfetto, 100, contenuto nel numero 300. In pratica, 300 è uguale a 100 volte 3, e il 100 viene via dal segno di radice sotto forma della propria radice quadrata, 10, lasciando ovviamente solo soletto il 3 sotto il segno di radice. La risposta che stavamo cercando sarà quindi $10\sqrt{3}$.

Per quanto riguarda, invece, $\sqrt{504}$, non è assolutamente immediato individuare un grosso quadrato perfetto che sia contenuto all'interno del numero 504, per cui è necessario utilizzare un metodo un tantino più lungo:

1) **Scindiamo 504 nel prodotto fra i suoi fattori primi:**

$$\sqrt{504} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}$$

2) **Cerchiamo ciascuna coppia di numeri(ovviamente uguali fra loro):**

$\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}$

3) Per ciascuna coppia di numeri cerchiata, prendiamo uno solo dei due numeri e tiriamolo fuori dal segno di radice:

$2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 7}$

4) Semplifichiamo il tutto in una notazione più compatta:

$6\sqrt{14}$

La seconda e ultimissima cosa da sapere riguardo alle radici è che, per convenzione, non lasciamo mai una radice al denominatore di una frazione – lo so , è una convenzione un po’ stupida e forse anche anacronistica , ma vale ancora oggi e viene ancora insegnata sui banchi di scuola, quindi è bene conoscerla. Quindi, se il nostro risultato è $\frac{2}{\sqrt{3}}$, basterà moltiplicarlo per $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ottenendo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

LOGARITMI

Logaritmi: non si tratta di una strana marca di scarpe!

U n **logaritmo** è soltanto un modo differente di esprimere una relazione esponenziale fra numeri. Ad esempio:

$2^3 = 8$ diventa

$\log_2 8 = 3$ (si legge logaritmo in base 2 di 8 è uguale a 3)

Tali due precedenti equazioni dicono esattamente la stessa cosa. Giusto per capirci, potete pensare a $2^3 = 8$ come la versione italiana e $\log_2 8 = 3$ come la versione latina. E , dal momento che per noi è più semplice pensare e fare matematica in italiano, assicuratevi che, ogni qualvolta incapperete in qualcosa di simile a $\log_3 81 = x$, istantaneamente venga “tradotto” in $3^x = 81$. La base di un logaritmo può essere qualsiasi numero maggiore o uguale a zero, eccetto però 1 e , per convenzione, nel caso sia pari a 10, si evita di scriverla. Ad esempio, $\log 1000 = 3$ vuol dire $\log_{10} 1000 = 3$. Inoltre, il logaritmo in base “e”(“e” circa uguale a 2.72) viene scritto “ln” invece di $\log_e \cdots$

Riguardo al logaritmo, bisogna conoscere le seguenti proprietà:

- $\log_c 1 = 0$
- $\log_c c = 1$
- $\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$
- $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$
- $\log_c a^b = b \log_c a$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a a^b = b$
- $a^{\log_a b} = b$

Facciamo subito un esempio, e vediamo a cosa possano servire tali proprietà.

Immaginiamo di voler calcolare $\log_3 20$ utilizzando la nostra super calcolatrice che possiede, però , soltanto i bottoni relativi al log(logaritmo in base 10) e ln (logaritmo in base “e”). Niente paura, non c’è bisogno di considerare inutile la nostra super, costosa calcolatrice. Utilizzando la seguente proprietà:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

e considerando la base 10 come “c”, potremo alternativamente(ottenendo il medesimo corretto risultato) calcolare:

$$\frac{\log 20}{\log 3}$$

SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

Quando ne abbiamo davvero bisogno?

Per quale motivo dovremmo avere bisogno di conoscere la scomposizione in fattori? La risposta è semplice. Perché nel Calcolo(sempre il linguaggio di Dio), vi capiterà di doverla utilizzare.

Partiamo dal significato. Cosa vuol dire "scomporre in fattori"? Significa ridurre un qualcosa ad una moltiplicazione fra fattori. È un po' come voler riscrivere il numero 12 in questa maniera: 2*2*3. Badate bene, nel Calcolo(che ricordo essere la matematica delle derivate, dei limiti e degli integrali) non incapperete mai in problemi di questo tipo. Piuttosto, dovrete essere in grado di fattorizzare(scomporre in fattori) delle espressioni algebriche, come ad esempio 5xy+10yz che diventerà 5y(x+2z). Ebbene, la fattorizzazione algebrica prevede sempre di dover **riscrivere una somma di termini come un prodotto.** Fin qui direi tutto tranquillo e lineare. Adesso vediamo come si fa!

Tiriamo fuori il MASSIMO COMUNE DIVISORE(MCD).

Il primo passo da seguire verso la fattorizzazione di qualsiasi tipo di espressione algebrica, è quello di tirar fuori, ovvero isolare sotto forma di fattore, la cosa più grande che tutti i termini hanno in comune fra loro. Stiamo parlando, ovviamente, del cosiddetto massimo(“la cosa più grande”) comune(“che hanno in comune fra loro”) divisore, altrimenti detto MCD. Ad esempio, ciascuno dei tre termini seguenti:

$$8x^3y^4 + 12x^2y^5 + 20x^4y^3z$$

contiene il fattore:

$$4x^2y^3$$

Per tale motivo, quest'ultimo, può essere tirato fuori in tale maniera:

$$4x^2y^3(2xy + 3y^2 + 5x^2z)$$

Assicuratevi che la ricerca e l'estrazione del MCD sia sempre il primo tentativo portato avanti al fine di fattorizzare un'espressione algebrica. Questo, perlomeno, prima di essere costretti a ricorrere ad altre tecniche di fattorizzazione.

Alla ricerca di una sequenza nota.

Subito dopo aver estratto il MCD, sempre che ne esista uno, ciò che bisogna fare è andare alla ricerca di una delle seguenti tre sequenze famose. A essere sinceri, la prima di cui parleremo è famosa e grandiosa. Le altre due, sono decisamente meno importanti! Passiamole in rassegna.

La differenza fra quadrati.

Sapere come si scompone in fattori una **differenza fra quadrati** è una cosa davvero critica e importantissima:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Se siamo, infatti, in grado di riscrivere qualcosa come $9x^2 - 25$ in modo tale che diventi qualcosa del tipo $(\text{questo})^2 - (\text{quello})^2$, poi sarà possibile utilizzare lo schema di scomposizione visto in precedenza. Vediamo come:

$$9x^4 - 25 = (3x^2)^2 - (5)^2$$

Ora, dal momento che:

$$(\text{questo})^2 - (\text{quello})^2 = (\text{questo} - \text{quello}) * (\text{questo} + \text{quello})$$

È possibile fattorizzare il problema nel seguente modo:

$$(3x^2)^2 - (5)^2 = (3x^2 - 5)(3x^2 + 5)$$

È importantissimo ricordare una cosa: la differenza fra quadrati, del tipo $a^2 - b^2$, **può** essere scomposta in fattori; la somma di quadrati, tipo $a^2 + b^2$, **NON può** essere scomposta in fattori. In altre parole, $a^2 + b^2$, così come i numeri 7 e 13, è prima, ovvero non la si può frammentare in pezzi più piccoli.

Somma e differenza di cubi.

Le altre due regole di fattorizzazione, quelle meno fondamentali e importanti, riguardano la somma e differenza di cubi:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Non ho altro da aggiungere in merito. Cercate di memorizzare anche queste perché può capitare di doverle utilizzare.

Proviamo un po' di fattorizzazione trinomiale.

Ricordate la vostra vecchia cara fattorizzazione trinomiale? Cercate di rispolverare i vostri più reconditi ricordi algebrici. Ho capito. Ripartiamo dalle definizioni.

Definizione : un trinomio è un polinomio con 3 termini. Un polinomio non è altro che un'espressione del tipo $4x^5 - 6x^3 + x^2 - 5x + 2$ in cui, eccetto le costanti(come ad esempio il numero 2 presente in questo caso), tutti i termini sono costituiti da una variabile elevata ad una potenza intera positiva. In altre parole, non sono concesse potenze frazionarie oppure negative(quindi $\frac{1}{x}$ non è un polinomio perché sarebbe uguale a x^{-1}). E non sono ammessi anche radicali, logaritmi, seni, coseni, o qualsiasi altra cosa. In pratica, vanno bene soltanto termini costituiti da un coefficiente, come il 4 in $4x^5$, moltiplicato per una variabile elevata a potenza. Il **grado** di un polinomio è la più alta potenza della variabile x, presente nel polinomio stesso. Quindi, il polinomio di esempio visto ad inizio paragrafo, possiede un grado pari a 5.

Non sarebbe una cattiva idea rispolverare il modo in cui sia possibile accelerare la risoluzione di problemi del tipo:

$$6x^2 + 13x - 5 = (2x+5)(3x-1)$$

in cui è possibile fattorizzare il trinomio presente sulla parte sinistra dell'equazione nel prodotto dei due binomi presenti sulla destra. Qualche tecnica standard di scomposizione di un trinomio come questo vaga, da qualche parte, nell'etere matematico, e probabilmente l'avrete imparata fra i banchi di scuola, o magari l'avrete insegnata a qualcuno. Il mio consiglio, a questo punto è: se riuscite a ricordare una di tali tecniche, grandioso. Altrimenti, non disperate. Sappiate che non vi capiterà, molto spesso, affrontando problemi di Calcolo, di dover scomporre in fattori un trinomio.

EQUAZIONI QUADRATICHE

Come risolverle.

Partiamo dalla definizione. Un’equazione quadratica è una qualsiasi equazione polinomiale di secondo grado – il che si verifica quando il più alto esponente di x, o di qualsivoglia altra variabile si sia scelto di utilizzare, è pari a 2. È possibile risolvere un’equazione quadratica utilizzando uno dei tre metodi base che andremo ad esaminare nel prosieguo delle pagine.

Metodo #1: Fattorizzazione.

Risolviamo l'equazione
$$2x^2 - 5x = 12$$

1) **Portiamo tutti i termini da una sola parte dell'equazione, lasciando uno zero dall'altra parte:**

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

2) **Fattorizziamo:**

$$(2x+3)(x-4) = 0$$

Ovviamente, potete sempre controllare che tali fattori siano corretti, moltiplicandoli fra loro. Seguite sempre la tecnica **FOIL(First, Outside, Inner,**

Last):

First □ $(2x + 3)(x - 4) = 2x^2$

Outside □

$$(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 8x$$

Inner □

$$(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 8x + 3x$$

Last □

$$(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 8x + 3x - 12 = 2x^2 - 5x - 12$$

3) Poniamo uguale a zero ciascun fattore ottenuto al punto precedente e risolviamo:

$$2x+3=0 \qquad \text{o} \qquad x-4=0$$
$$2x=-3 \qquad\qquad x=4$$
$$x=-\frac{3}{2}$$

Per cui tale equazione possiede due soluzioni:

$$x=-\frac{3}{2}$$

$$x=4$$

Ovviamente, tale primo metodo funziona solo e soltanto se il polinomio quadratico è fattorizzabile. Domanda: un polinomio quadratico è sempre fattorizzabile? Esiste un trucchetto per saperlo a priori. Ce lo dice il cosiddetto "discriminante". E, il test del discriminante è davvero immediato. Un polinomio quadratico è fattorizzabile se il discriminante, $b^2 - 4ac$, è un numero quadrato perfetto, come 0,1,4,9,16,25 … Nell'equazione quadratica vista nell'esempio p r e c e d e n t e , $2x^2 - 5x - 12 = 0$, a=2 , b=-5 e c=-12. Per cui, $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 * (2) * (-12) = 121$. Dal momento che 121 è un quadrato perfetto, $(11)^2$, il polinomio quadratico è fattorizzabile. Dal momento che, fattorizzare un trinomio, è molto spesso un lavoro semplice e veloce, potreste anche scegliere di fiondarvi nella fattorizzazione del polinomio, senza badare a controllare il discriminante. D’altro canto, la prova del discriminante rimane sempre una buona idea di fondo, che consentirebbe di non perdere tempo nel cercare di fattorizzare un trinomio quadratico che, magari, non è fattorizzabile!

Metodo #2: la formula quadratica.

La soluzione o le soluzioni di un'equazione quadratica, $ax^2 + bx + c = 0$, sono date dalla formula quadratica seguente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Proviamo a risolvere la stessa identica equazione quadratica vista nel paragrafo precedente, questa volta però utilizzando la formula quadratica:

1) **Portiamo tutti i termini da un solo lato dell'equazione, lasciando**

zero dall'altro:

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$

2) Sostituiamo i coefficienti all'interno della formula. In tal caso, a=1, b=-5 e c=-12:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-12)}}{2 \cdot 2}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - (-96)}}{4}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4}$$
$$= \frac{5 \pm 11}{4}$$
$$= \frac{16}{4} \text{ o } -\frac{6}{4}$$
$$x = 4 \text{ o } -\frac{3}{2}$$

Il risultato, naturalmente, è in perfetto accordo con quanto ottenuto in precedenza. Se non lo fosse io mi preoccuperei seriamente, dal momento che stiamo risolvendo la stessa equazione di prima, soltanto cambiando metodologia di risoluzione!

Metodo #3: il completamento del quadrato.

Il terzo metodo di risoluzione di un'equazione quadratica viene definito **completamento del quadrato**, dal momento che prevede di creare un quadrato trinomiale perfetto che è possibile risolvere applicando la corrispondere radice quadrata. Vediamo un esempio. Risolviamo la seguente equazione:

$$3x^2 = 24x + 27$$

1) **Per prima cosa poniamo i**

termini in x^2 e x da un lato dell'equazione e la costante dall'altro:

$$3x^2 - 24x = 27$$

2) Dividiamo ambo i lati dell'equazione per il coefficiente del termine x^2(a meno che chiaramente non sia pari a 1):

$$x^2 - 8x = 9$$

3) Prendiamo la metà del coefficiente del termine in x , la eleviamo al quadrato e infine la sommiamo ad ambo i lati dell'equazione:

la metà di -8 è -4, e $(-4)^2$ è pari a 16. Quindi sommo 16 ad ambo i lati dell'equazione:

$$x^2 - 8x + 16 = 9 + 16$$

4) Fattorizziamo il lato sinistro dell'equazione in un binomio al quadrato. Da notare come, tale fattore, contenga sempre lo stesso numero ottenuto al punto 3), nel nostro caso -4:

$$(x-4)^2 = 25$$

5) Estraiamo la radice quadrata da ambo i lati dell'equazione, ricordando sempre di porre il segno ± sul lato destro:

$$\sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{25}$$
$$x - 4 = \pm 5$$

6) Risolviamo:

$$x = 4 \pm 5$$

$$x = 9 \text{ or } -1$$

FUNZIONI

Introduzione.

Virtualmente, ogni cosa che facciamo nel Calcolo(il linguaggio di Dio), ha a che fare con funzioni e rispettivi grafici, in un modo o nell'altro. Ad esempio, il calcolo differenziale prevede la ricerca della pendenza di varie funzioni, il calcolo integrale coinvolge la determinazione dell'area sottostante le funzioni. E, c'è anche da sottolineare, come il concetto di funzione non soltanto sia critico e fondamentale per il Calcolo, ma sia una delle idee fondamentali all'interno dell'intera Matematica. Per cui, avventuriamoci in un altro tassello imprescindibile verso la comprensione matematica!

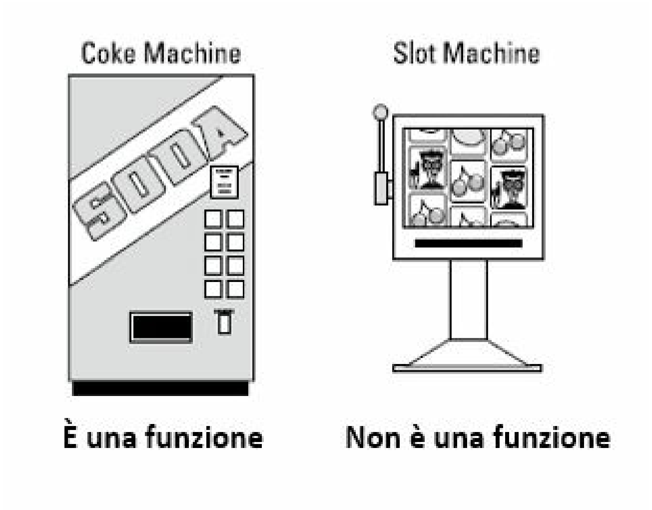
Che cos’è una funzione?

Fondamentalmente, una funzione non è altro che una relazione fra due cose, in cui il valore numerico di una cosa dipende, in qualche modo, dal valore dell’altra. Prego? Vediamo alcuni esempi tratti dal mondo che ci circonda. La temperatura giornaliera media della città in cui viviamo, dipende ed è una funzione del periodo dell’anno in cui ci troviamo; la distanza raggiunta da un oggetto in caduta libera è una funzione di quanto tempo è trascorso da quando è stato gettato; l’area di un cerchio è una funzione del suo raggio; la pressione di un gas racchiuso all'interno di un contenitore è una funzione della sua temperatura. Ho reso l'idea?

Le caratteristiche di una funzione.

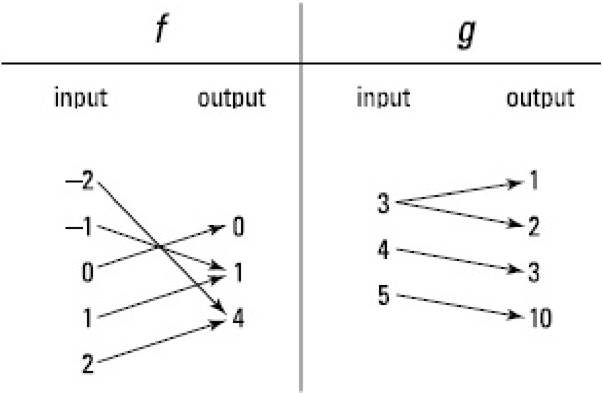
Una funzione possiede uno e un solo output per ciascun input.

Vediamo immediatamente un esempio grafico:



La "Coke machine" è una funzione perché, dopo aver inserito i nostri input(la nostra scelta e i nostri soldi), sappiamo esattamente quale sarà l'output. D'altro canto, nel caso della "Slot machine", l'output è un mistero, per cui non si tratta di una funzione.

Vediamo un altro esempio, questa volta numerico:



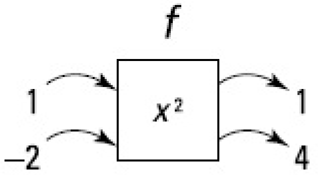
La funzione quadrato, f, è una funzione perché ha assegnato esattamente un unico output, a ciascun input. Non importa se 2 e -2 producono esattamente lo stesso output, 4, perché, dato un input(diciamo -2 ad esempio) non vi è alcun mistero riguardo al corrispondente output. D'altro canto, quando inseriamo 3 come input della relazione g, non sappiamo se l'output sia 1 oppure 2. Quindi, dal momento che non è ammesso alcun mistero riguardo all'output delle funzioni, g non è una funzione.

Ricordate, le funzioni buone, a differenza dei buoni libri, hanno sempre un finale prevedibile.

Definizione di dominio e codominio: l'insieme di tutti quanti gli input di una funzione viene definito **dominio** della funzione stessa; l'insieme di tutti quanti gli output, invece, viene definito **codominio** della funzione.

Molte persone amano pensare una

funzione alla stessa stregua di una macchina. Per cui, per giovare alla comprensione di quest'ultime, torniamo a considerare la nostra funzione quadrato, f, mostrando due input e i rispettivi due output.



Inserendo un 1 all'interno della nostra funzione-macchina, verrà fuori un 1 come output. Inserendo -2 come input, verrà invece fuori un 4 come output. Insomma, una funzione-macchina prende un input, ci lavora un po' su in qualche modo, e sputa fuori un output.

Variabili dipendenti e indipendenti.

Definizione di variabile dipendente e indipendente: all’interno di una funzione, la cosa che dipende da un’altra cosa viene definita **variabile dipendente;** l’altra cosa viene invece definita **variabile indipendente**. Dal momento che noi inseriremo dei numeri al posto della variabile indipendente, quest’ultima viene anche definita **variabile di input.** Dopo aver inserito un numero, calcoliamo l’output o la risposta per la variabile dipendente, per cui quest’ultima viene anche definita

variabile di output. Quando rappresentiamo graficamente una funzione, la variabile indipendente verrà sempre riportata sull’asse delle ascisse(l’asse x), mentre la variabile dipendente andrà sull’asse delle ordinate(asse y).

A volte, la dipendenza fra due cose è del tipo causa-effetto – ad esempio, un aumento nella temperatura di un gas causa un aumento nella pressione. In tale ultimo caso, la temperatura è la **variabile indipendente** mentre la pressione è la **variabile dipendente**, dal momento che la pressione dipende dalla temperatura.

Ad ogni modo, molto spesso la

dipendenza non è del tipo causa-effetto, ma soltanto una sorta di associazione fra due cose. Di solito, la variabile indipendente è la cosa che già conosciamo o che possiamo accertare molto facilmente, mentre quella dipendente è la cosa che vogliamo determinare. Facciamo un esempio. Noi non potremmo affermare che il tempo causa la caduta di un oggetto(perché la causa è la gravità), tuttavia se conosciamo quanto tempo è trascorso da quando l’oggetto è stato gettato, possiamo determinare quanto distante è caduto. Per cui, il tempo è la variabile indipendente, mentre la distanza di caduta è quella dipendente; e possiamo affermare che tale distanza è una funzione del tempo. In definita, qualsiasi sia il tipo di corrispondenza fra le due variabili, la variabile dipendente(la variabile y, per intenderci) è la cosa a cui siamo maggiormente interessati, di solito. Generalmente, infatti, vogliamo sapere cosa accada alla variabile dipendente, o variabile y, man mano che la variabile indipendente, o variabile x, procede verso destra: ovvero, se la variabile y (cioè l'altezza del grafico) sale o scende e, se ciò accade, con quale rapidità lo fa; oppure se il grafico è piatto, senza ascese o discese di alcun tipo.

La notazione utilizzata per le funzioni.

Il modo più comune di scrivere una funzione del tipo $y = 5x^3 - 2x^2 + 3$, è quello di sostituire, al posto della y, “f(x)”, e quindi scrivere: $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3$. Si tratta, essenzialmente, di due notazioni differenti per esprimere la stessa cosa. Tali due equazioni, infatti, sono, sotto ogni punto di vista, matematicamente identiche. Un tipico problema in cui gli studenti di matematica incappano, la prima volta che incontrano la notazione di una funzione, è quello di rimanere un po' confusi. Si chiedono cosa sia quella "f", oppure se "f(x)" significhi f moltiplicato x. E , ovviamente, ciò non deve accadere. Per cui, se la notazione utilizzata per le funzioni vi fa sorgere dei dubbi, pensate a f(x) come a un modo in cui y viene scritto in una lingua straniera. Non considerate mai la f e la x come due cose separate; bensì pensatele come un unico simbolo che rappresenta, in tutto e per tutto, la y.

Un altro modo per aiutarvi, è quello di pensare a f(x) come un'abbreviazione di "una funzione di x". È quindi possibile scrivere $y = f(x) = 3x^2$, il che tradotto diventa: y è una funzione di x e tale funzione è uguale a $3x^2$. A volte, vengono utilizzate altre lettere, al posto di f, come g(x) oppure p(x), soltanto per differenziare fra differenti funzioni. La lettera utilizzata per rappresentare la funzione non necessariamente deve significare qualcosa, anche se , il più delle volte, viene adoperata la prima lettera di una parola. Ad esempio, sappiamo che l'area di un quadrato si calcola elevando al quadrato il suo lato: $\mathrm{Area} = (\mathrm{lato})^2$ o p p u r e $A = l^2$. Quindi, l'area di un quadrato dipende, ed è funzione, della lunghezza del suo lato. Scriveremo, quindi: $A(l) = l^2$.

Quiz time: c'è differenza fra $f(x) = x^2$ e la funzione che rappresenta l'area di un quadrato $A(1) = 1^2$?

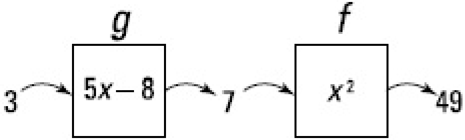
Risposta: mentre per $f(x) = x^2$, x può essere uguale a qualsiasi numero, con la funzione $A(1) = 1^2$, deve per forza essere positivo, dal momento che la lunghezza del lato di un quadrato non può essere negativa o pari a zero. Le due funzioni possiedono, quindi, differenti domini.

Consideriamo nuovamente la funzione quadrato, $y = x^2$ oppure $f(x) = x^2$

. Quando inseriamo 3 al posto di x, l’output è pari a 9. Quindi, la notazione delle funzioni risulta molto conveniente dal momento che, in maniera molto concisa, riusciamo ad esprimente sia l’input che l’output scrivendo: $f(3) = 9$. Ricordiamo che, $f(3) = 9$, significa che, quando x è uguale a 3, f(x) o equivalentemente y è pari a 9. Quindi, ci dice proprio tutto.

Funzioni composte.

Una funzione composta è una combinazione di due funzioni. Ad esempio, il costo dell'energia elettrica necessaria a far andare l'aria condizionata all'interno di casa nostra dipende, ovviamente, da quanta elettricità utilizziamo, e tale uso dipende dalla temperatura esterna. Ora, dal momento che il costo dipende dall'utilizzo e l'utilizzo dipende dalla temperatura, il costo dipende dalla temperatura. In linguaggio "funzionale", il costo è una funzione dell'utilizzo e l'utilizzo è una funzione della temperatura, perciò il costo è una funzione della temperatura. Tale ultima funzione, combinazione delle prime due, è un esempio di funzione composta. Immaginiamo che $f(x)=x^2$ e $g(x)=5x-8$. Ponendo x=3 all'interno di g(x) avremo: $g(3)=5*3-8=7$. Ora , prendiamo tale output, 7, e inseriamolo all'interno di f(x): $f(7)=(7)^2=49$. Vediamo il tutto sotto forma di macchina. La macchina g trasforma il 3 in un 7 e, successivamente, la macchina f trasforma il 7 in un 49.



È possibile esprimere il risultato netto delle due funzioni in un solo passaggio, utilizzando una funzione composta:

$$f(g(3))=49$$

Per prima, si calcola sempre la funzione interna della funzione composta: g(3)=7. Poi, si prende l'output così ottenuto, 7, e si calcola f(7), ottenendo 49.

Per determinare, quindi, la funzione composta generale, f(g(x)), sostituiamo per prima cosa g(x) all'interno di f(x). In altre parole, si vuole determinare f(5x-8). La funzione f, o la macchina f che dir si voglia, prende tale input e lo eleva al quadrato. Per cui:

$$
\begin{aligned}
f(5x-8) &= (5x-8)^2 \\
&= (5x-8)(5x-8) \\
&= 25x^2 - 40x - 40x + 64 \\
&= 25x^2 - 80x + 64
\end{aligned}
$$

Per cui:

$$f(g(x)) = 25x^2 - 80x + 64.$$

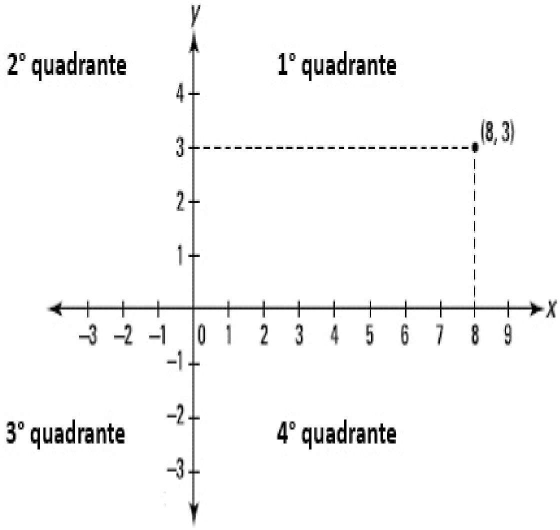
Ricordate sempre una cosa: **con le funzioni composte l'ordine conta un sacco!**

Come regola generale:

$$f(g(x)) \neq g(f(x))$$

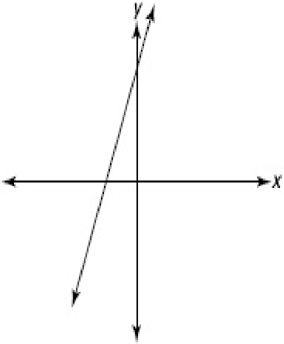
Che aspetto ha una funzione?

Non voglio assolutamente fare l'esperto di storia della matematica, ma tutti, o quasi, sappiamo che a Renè Descartes si deve il sistema di coordinate x-y, in suo onore definito "sistema cartesiano".

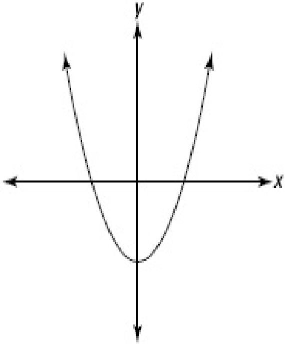


Ora, Isaac Newton e Gottfried Leibniz sono stati accreditati dell'invenzione del Calcolo, di certo un altro blasone rispetto al sistema cartesiano, ma è davvero difficile immaginare che avrebbbero potuto farlo senza il nobile contributo di Descartes, diverse decadi prima. Provate a pensare al sistema di coordinate come alla vostra personalissima finestra sul mondo del Calcolo. Praticamente, qualsiasi cosa nei libri di Calcolo(il linguaggio di Dio) coinvolge, direttamente o indirettamente, i grafici di rette oppure curve – di solito si tratta di funzioni – all’interno del sistema di coordinate x-y. Consideriamo i quattro grafici seguenti:

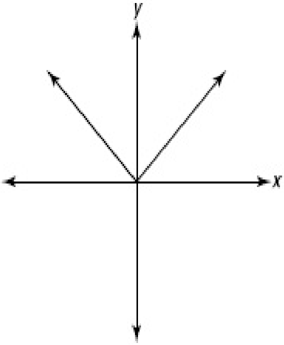
$y = 3x + 5$



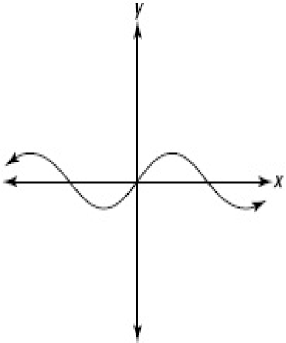
$y = x^2 - 2$



$y = |x|$



$y = \sin x$

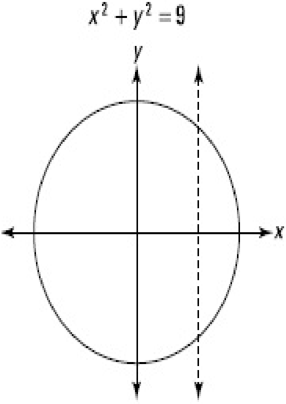


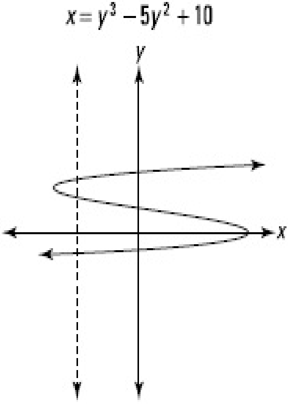
Tali quattro curve(parlo di curve riferendomi a qualsiasi forma, dritta o curva che sia) sono delle funzioni perché superano il **test della linea verticale**.

Test della linea verticale: una curva è una funzione se una linea verticale tracciata attraverso la curva stessa – dove venga tracciata è indifferente – tocca la curva soltanto una volta. Ciò garantisce che ciascun punto, all'interno del dominio della funzione, possiede esattamente un output.

E, come potete verificare praticamente, indipendentemente da dove la tracciate su ognuno dei quattro grafici precedenti, la linea verticale toccherà la curva soltanto in un punto. Provare per credere!

Se , tuttavia, è possibile tracciare una linea verticale in modo che tocchi una curva due o più volte, allora la curva stessa non è una funzione. Ad esempio, le due curve seguenti non sono delle funzioni:





Per cui, ricapitolando, le prime quattro curve sono delle funzioni, mentre le ultime due non lo sono. Tuttavia , tutte e sei le curve sono delle **relazioni**.

Definizione di relazione: una relazione è una collezione di punti sul sistema di coordinate x-y

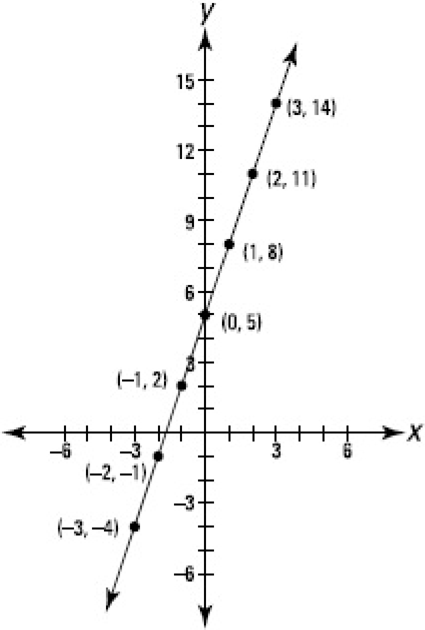
Voglio essere onesto con voi. Studiando il Calcolo , vi ritroverete a spendere del tempo di fronte a relazioni che non sono funzioni – come ad esempio le circonferenze. Tuttavia, la stragrande maggioranza dei problemi coinvolgerà delle funzioni vere e proprie.

Le funzioni più comuni e i rispettivi grafici.

Sapete, nella vostra vita matematica vi capiterà di studiare centinaia di differenti funzioni, per cui non è un'idea malvagia quella di familiarizzare un po' di più con le principali e più utilizzate: la retta, la parabola, la funzione esponenziale e quella logaritmo.

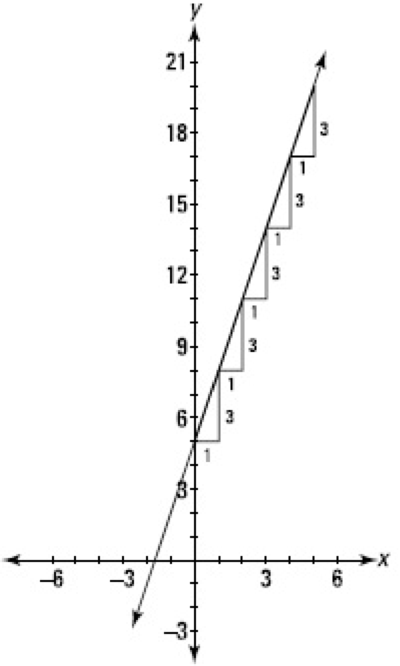
Le rette nel piano.

La retta è la funzione più semplice da rappresentare su un piano di coordinate cartesiane. Ma allora, perché sono così importanti le rette? La risposta è semplice. Nel Calcolo, che come avrete già capito è la mira ultima di ogni nostra umana pretesa di conoscenza, capita molto spesso di dover studiare delle rette che sono tangenti alle curve oppure, è bene sapere che, quando si ingrandisce, un sufficiente numero di volte, su di una particolare zona di una curva(quando si "zoomma" diranno i più giovanili fra voi) , la curva stessa appare e si comporta alla stessa stregua di una retta. Nella figura seguente osserviamo, come esempio, la funzione y=3x+5:



La pendenza di una retta.

La cosa più importante da sapere riguardo alle rette, perlomeno la più importante ai fini dello studio del Calcolo(che è la cosa più importante da conoscere in Matematica), è la loro pendenza o ripidità che dir si voglia. Tornando alla retta rappresentata nella figura precedente, ogni qualvolta la x proceda di 1 verso destra, la y andrà su di 3. Un ottimo modo per visualizzare la pendenza è quella di disegnare letteralmente una sorta di scalinata sotto il grafico della retta. Una cosa del genere, per intenderci:



Chiameremo la parte verticale di ciascun gradino "rise"(che in inglese significa “salita”), mentre la parte orizzontale verrà definita “run”(che in inglese vuol dire ”corsa”). Ebbene, la pendenza è definita come il rapporto fra “rise” e “run”:

$$\text{pendenza} = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{3}{1} = 3$$

Badate bene, non è necessario porre sempre e comunque il “run” pari a 1. Il rapporto fra “rise” e “run”, e quindi la pendenza, verrà fuori sempre uguale, indipendentemente da quanto siano ampi i nostri gradini ideali. Ovviamente, ponendo il “run” uguale a 1, la pendenza sarà uguale al “rise”, dal momento che un qualsiasi numero diviso per 1 darà sempre come risultato se stesso. E questo è un ottimo approccio per figurare la pendenza – ovvero la pendenza è l'ammontare di cui va su una retta a ogni spostamento verso destra di 1.

Definizione di pendenza positiva, negativa, nulla e indefinita: le rette che vanno su verso destra hanno una pendenza <u>positiva</u>; le rette che vanno giù verso destra hanno una pendenza <u>negativa</u>; le rette orizzontali hanno una pendenza pari a <u>zero;</u> le rette verticali non possiedono una pendenza(in tal caso si dice che abbiano una pendenza indefinita).

Di seguito vediamo la formula relativa al calcolo della pendenza:

$$\text{pendenza} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Prendiamo due punti qualsiasi sulla retta precedente, diciamo (1,8) e (3,14), e inseriamoli all'interno della formula per il calcolo della pendenza:

$$\text{pendenza} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 8}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Tale computo, in un certo senso, coinvolge un gradino immaginario che corre verso destra di 2 e sale di 6. E il risultato è, ovviamente, coerente con quanto ci aspettavamo. Ovvero, 3. Ulteriormente, ogni retta parallela a questa, possiede esattamente la medesima pendenza. Ogni retta perpendicolare, avrà una pendenza pari a $-\frac{1}{3}$, che è il **reciproco opposto** di 3. Riassumendo:

le rette parallele fra loro hanno la stessa pendenza. Le rette perpendicolari fra loro hanno pendenze reciproche opposte.

Rappresentare le rette.

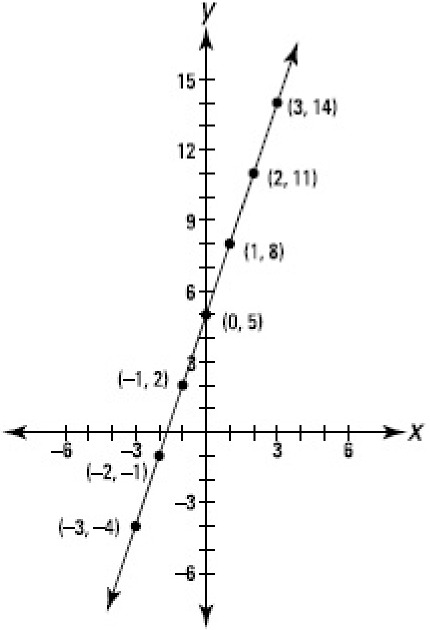
Qualora disponessimo dell'equazione di una retta, $y=3x+5$ ad esempio, ma non del suo grafico, ci sarebbero due modi per ottenere il grafico della retta stessa: alla vecchia maniera e alla maniera moderna. La "vecchia maniera" consiste nel costruire una tabella di valori ottenuti inserendo dei numeri al posto di x nell'equazione e calcolando la y corrispondente. Per intenderci: sostituendo 0 al posto di x otterremo una y uguale a 5; sostituendo 1 al posto di x , y sarebbe uguale a 8; sostituendo 2 al posto di x avremo che y sarà uguale a 11; e così via. Vediamo i risultati graficamente:

x	0	1	2	3	4	
y	5	8	11	14	17	

A questo punto basterà disegnare i singoli punti su un grafico cartesiano, collegarli fra loro, e porre una freccetta in corrispondenza di ciascuna estremità(quest'ultima cosa non è indispensabile). Il metodo "moderno" consiste nell'inserire l'equazione della retta all'interno di una calcolatrice grafica e attendere che quest'ultima faccia, per noi, tutto quanto il lavoro sporco.

Equazione della retta nella forma pendenza-intercetta.

Riprendiamo il grafico della retta precedentemente considerata come esempio:



La prima cosa da notare è come la retta intercetti l’asse y in corrispondenza del punto con ordinata 5. Tale punto, viene appunto definito **intercetta y** della retta stessa. E, dal momento che entrambe, pendenza 3 e intercetta 5, compaiono all'interno dell'equazione della retta, y=3x+5, tale equazione è detta essere nel formato pendenza-intercetta. Vediamo tale formato scritto in maniera generica:

formato pendenza-intercetta: y=mx+b

dove, ovviamente, m è la pendenza e b l'intercetta con l'asse y.

Ebbene, tutte quante le rette, eccetto quelle verticali, possono essere scritte utilizzando tale formato. Giusto per intenderci, le rette verticali sono invece del tipo x=6, ad esempio. Il numeretto, per quest'ultime, ci dice dove la retta stessa intercetta l'asse x. Le rette orizzontali, invece, appaiono in maniera ancora differente: y=10, ad esempio. Tuttavia, tecnicamente, tale forma rimanda a quella generica, y=mx+b, solo che per le rette orizzontali la pendenza è pari a zero e dal momento che zero moltiplicato x è pari a zero , il termine in x dell'equazione generale scompare. Ma se volete, potete ugualmente scrivere y=0x+10.

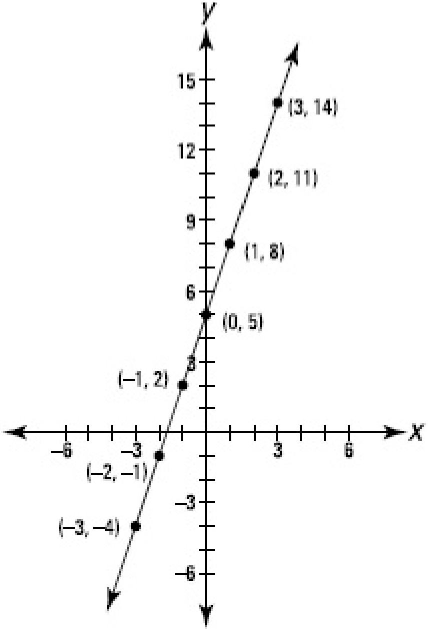
Definizione di funzione costante: la retta è la più semplice tipologia di funzione, e la retta orizzontale è il più semplice tipo di retta. Ciononostante, è di estrema importanza nel mondo del Calcolo, soprattutto, e più in generale della Matematica, per cui bisogna sapere che l'equazione di una retta orizzontale è del tipo y=10 e che la sua pendenza è pari a zero.

Nel caso in cui m=1 e b=0, otterremo la funzione y=x. Tale retta particolare passa per l'origine degli assi cartesiani, il punto (0,0), e forma un angolo di 45° con entrambi gli assi cartesiani. Essa viene definita **funzione identità**, dal momento che gli output sono uguali agli input.

Formato punto-pendenza: oltre al formato pendenza-intercetta, per l'equazione di una retta, bisogna conoscerne anche un secondo, il cosiddetto formato punto-pendenza:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Come si evince dal nome, per utilizzare tale formato, bisognerà conoscere un punto appartenente alla retta stessa e la pendenza di quest'ultima. È possibile utilizzare qualsiasi punto appartenente alla retta. Consideriamo nuovamente la retta già vista in precedenza:



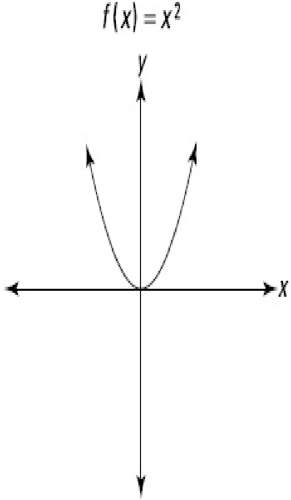
Prendiamo un qualsiasi punto su di essa, diciamo il punto (2,11), e sostituiamo le rispettive coordinate x e y al posto rispettivamente di x_1 e y_1 , e 3 al posto della pendenza m:

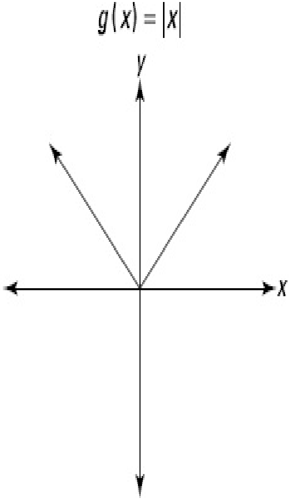
$$y - 11 = 3(x - 2)$$

Giusto con un pizzico di algebra, ma tanto ormai stiamo diventando degli esperti in materia, è possibile convertire tale equazione in quanto già conoscevamo: $y=3x+5$. Provare per credere!

Le funzioni pari: parabola e valore assoluto.

Chi ha già studiato un po' di matematica, dovrebbe essere già familiare con due funzioni molto importanti: la parabola, $f(x)=x^2$, e il valore assoluto, $g(x)=|x|$. Vediamole graficamente:





Come potete notare, entrambe le funzioni sono simmetriche rispetto all'asse y. In altre parole, i lati destro e sinistro di ciascun grafico sono immagini speculari l'uno dell'altro. Il che rende loro delle

funzioni pari. Una funzione polinomiale del tipo $y = 9x^4 - 4x^2 + 3$, dove tutte le potenze di x hanno esponente pari, è uno dei tanti tipi di funzione pari. In tal caso, la presenza del termine costante 3 non inficia minimamente il carattere "paritario" della funzione stessa, dal momento che sarebbe ugualmente possibile scriverlo $3x^0$, e ovviamente zero è un numero pari.

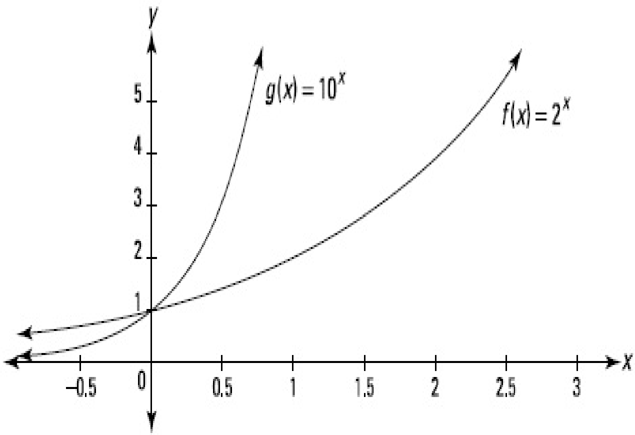
Funzioni dispari.

Funzioni tipo $f(x) = x^3$ oppure $g(x) = \sqrt[3]{x}$, illustrano perfettamente il caso di simmetria dispari. Per crederci, bisognerebbe rappresentare tali funzioni, magari utilizzando delle calcolatrici grafiche, sacro dono della modernità. Le funzioni dispari sono simmetriche rispetto all'origine degli assi cartesiani, il che significa che ruotandole di 180°, attorno all'origine degli assi, esse planerebbero esattamente sulle proprie posizioni di partenza. Una funzione polinomiale del tipo

$y = 4x^5 - x^3 + 2x$, in cui tutte le potenze possiedono degli esponenti dispari, è un tipico esempio di funzione dispari. Nel caso di funzioni polinomiali dispari, a differenza di quanto visto per quelle pari, non è assolutamente concesso che la funzione contenga un termine costante. Altrimenti non si tratterebbe di una funzione dispari! È bene sapere che, molte funzioni sono né pari né dispari, come ad esempio $y = 3x^2 + 5x$. Molte volte due è meglio di uno. Che poi alla fine non è due ma è un bel niente. Va bè, lasciamo perdere!

La funzione esponenziale.

Una funzione esponenziale è una funzione con una potenza che contiene, al suo interno una variabile. Ad esempio, $f(x) = 2^x$ oppure $g(x) = 10^x$. Vediamo entrambe tali funzioni di esempio rappresentate all'interno dello stesso sistema di coordinate x-y:

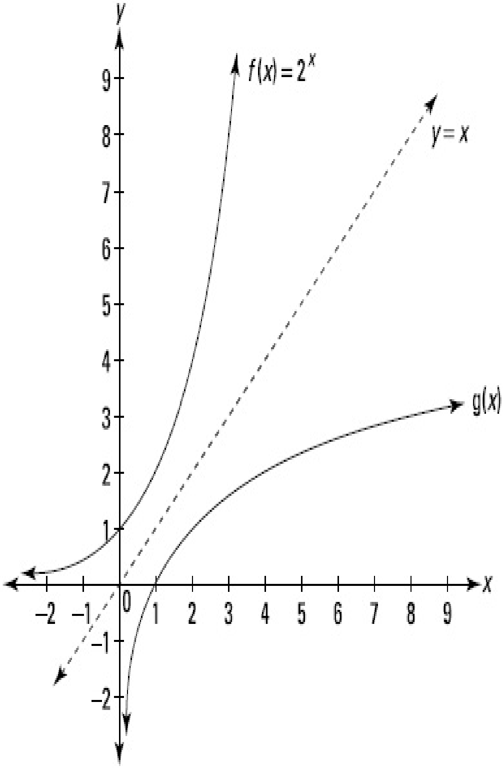


Da notare come entrambe le funzioni passino per il punto (0,1), come d'altronde fanno tutte quante le funzioni esponenziali della forma $f(x) = b^x$. Quando b è maggiore di 1, avremo una <u>crescita esponenziale</u>. Tali funzioni, tutte quante, crescono sempre più, senza limite, procedendo a destra, verso l'infinito positivo. Quando vanno, invece, a sinistra, procedendo verso l'infinito negativo, strisciano lentamente lungo l'asse x, avvicinandosi sempre più ad esso, senza però toccarlo. Questo contatto non accadrà mai. Tali funzioni vengono utilizzate per rappresentare dli andamenti di cose come investimenti, inflazione, crescita di popolazioni.

Quando, invece, b è un numero compreso fra 0 e 1, avremo una funzione a <u>decadimento esponenziale</u>. I grafici di tali funzioni sono esattamente identici a quelli delle funzioni a crescita esponenziale, ovviamente nella forma ma non nella sostanza delle cose, però al contrario. E funzioni a decadimento esponenziale toccheranno sempre l’asse y in corrispondenza del punto (0,1), ma andranno su a sinistra per sempre e strisceranno lungo l’asse x , questa volta però verso destra. Tale tipologia di funzione viene utilizzata per rappresentare l’andamento di cose che si riducono nel tempo, come ad esempio il decadimento radioattivo dell’ uranio.

La funzione logaritmo.

Una funzione logaritmo è semplicemente una funzione esponenziale con gli assi x e y scambiati fra loro. In altre parole, le direzioni "su e giù" sul grafico esponenziale corrispondono a quelle "destra e sinistra" sul grafico logaritmo, e le direzioni "destra e sinistra" sul grafico esponenziale corrispondono alle direzioni "su e giù" sul grafico logaritmo. Cerchiamo di rappresentare tale relazione su un grafico in cui saranno presenti sia la funzione $f(x) = 2^x$ che la funzione $g(x) = \log_2 x$



Entrambe, la funzione esponenziale e

quella logaritmo, sono delle funzioni **monotone.** Una funzione monotona va su per il suo intero dominio(in tal caso parleremo di funzione crescente) oppure va giù per il suo intero dominio(in tale altro caso parleremo di funzione decrescente). Chiaramente l’andar su oppure giù presuppone che il movimento lungo la funzione stia avvenendo da sinistra verso destra. Da notare, sempre sul nostro grafico generale, la simmetria delle due funzioni rispetto alla retta y=x. Ciò rende le due funzioni **inverse** una rispetto all’altra. Ma di questo parleremo fra poco! Anzi fra pochissimo!

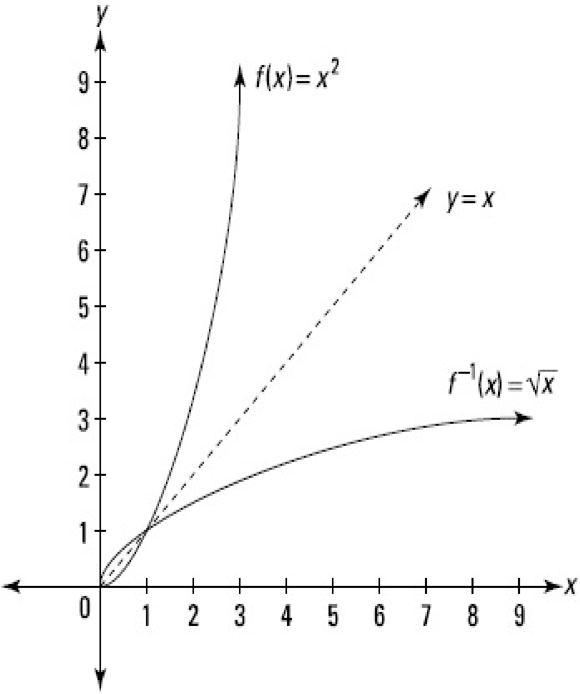
Le funzioni inverse.

La funzione $f(x) = x^2$, (con $x \geqslant 0$) e la funzione $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (che si legge “f inversa di x”) sono funzioni inverse l’una rispetto all’altra, perché l’una disfà ciò che l’altra fa. In altre parole, $f(x) = x^2$ prende un input, diciamo ad esempio 3, e produce un output di 9(perché $3^2 = 9$); $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, invece, prende il 9 e lo trasforma nuovamente in 3(perché

$\sqrt{9}=3$). Da notare come f(3)=9 e $f^{-1}(9)=3$. È possibile scrivere tutto ciò in un sol colpo: $f^{-1}(f(3))=3$. E funziona alla stessa maniera se partiamo da $f^{-1}(x)$. $f^{-1}(16)=4$(perché $\sqrt{16}=4$) e f(4)=16(perché $4^2=16$). Scrivendo tutto ciò in un sol colpo avremo: $f(f^{-1}(16))=16$ (da notare che entrambe le funzioni sono inverse l'una rispetto all'altra).

La regola della funzione inversa: si dice che le funzioni f(x) e $f^{-1}(x)$ sono inverse, se e solo se $f(f^{-1}(x)) = x$ e $f^{-1}(f(x)) = x$.

Da non confondere il suffisso -1, all'interno di $f^{-1}(x)$ con l'esponente -1: l'esponente -1 fornisce il reciproco di qualcosa, ad esempio $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Invece, $f^{-1}(x)$ è l'inverso di f(x). Non è uguale a $\frac{1}{f(x)}$, che è invece il reciproco di f(x). Per cui, se è vero che si utilizzano gli stessi simboli per le due cose, si tratta però di cose differenti. Quando si rappresentano graficamente due funzioni inverse fra loro, ciascuna è l'immagine speculare dell'altra, riflessa rispetto alla retta y=x. Vediamo, nella figura seguente, i grafici delle funzioni inverse $f(x) = x^2 (\text{con } x \geqslant 0)$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$:

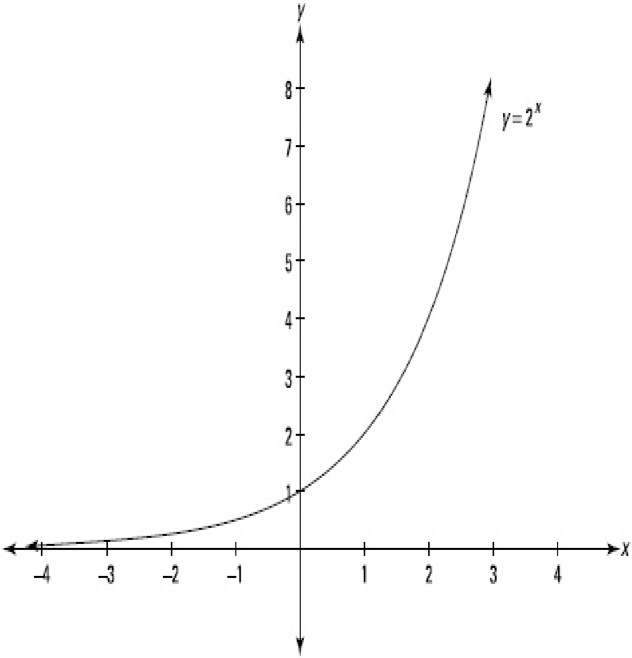


Ruotando il grafico sopra riportato, in

senso antiorario, di modo che la retta y=x risulti verticale, si può vedere facilmente come f(x) e $f^{-1}(x)$ siano delle immagini speculari l'una rispetto all'altra. Una conseguenza di tale simmetria è che, se un punto come ad esempio (2,4), si trova su una delle due funzioni, il punto (4,2) si troverà sull'altra. E ancora, il dominio di f è il codominio di f^{-1}, e il codominio di f è il dominio di f^{-1}.

Traslazioni, riflessioni, allargamenti e restringimenti.

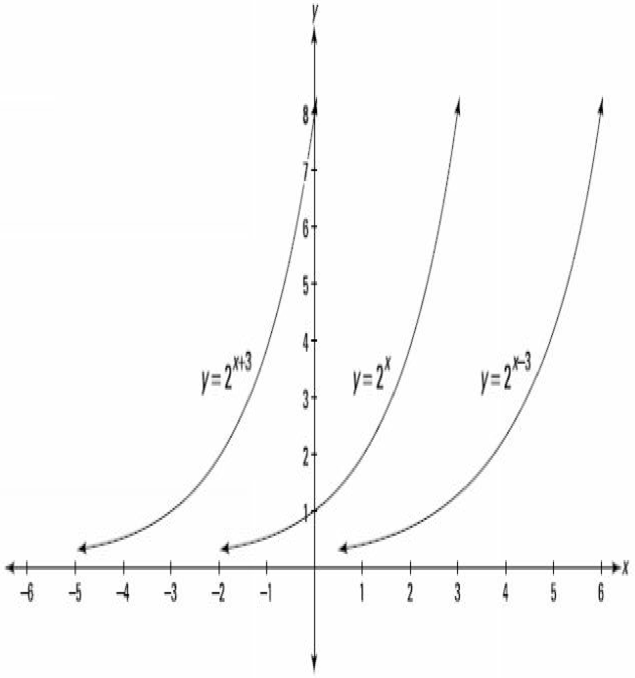
Qualsiasi funzione può essere trasformata in una funzione correlata. Basterà, infatti, prendere la funzione di partenza e traslarla orizzontalmente oppure verticalmente, allargarla oppure restringerla sempre orizzontalmente o verticalmente. Prenderemo in considerazione, per prima cosa, le trasformazioni orizzontali. E la funzione esponenziale $y = 2^x$ sarà la nostra inquisita. Il grafico è, ovviamente, il seguente:



Ma questo lo avevamo già imparato!

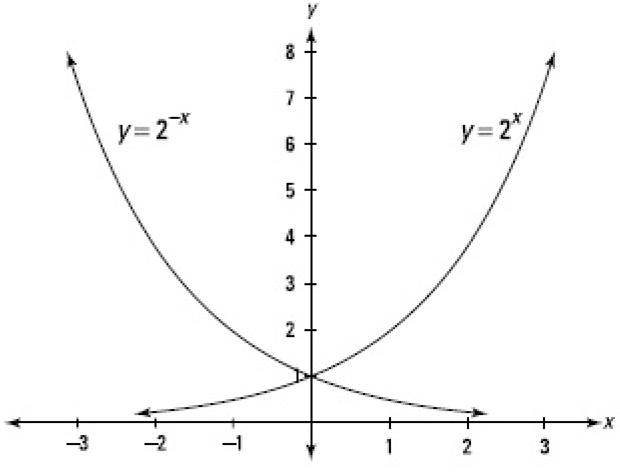
Le trasformazioni orizzontali.

I cambiamenti orizzontali vengono attuati aggiungendo un numero o sottraendo un numero alla variabile x, oppure moltiplicando x per un numero. Tutte le trasformazioni orizzontali, eccetto la riflessione, funzionano in modo **opposto** a quanto ci si aspetterebbe. Sommare qualcosa ad x, fa in modo che la funzione vada verso sinistra; sottrarre da x qualcosa, invece, fa in modo che la funzione vada verso destra. Moltiplicare la x per un numero maggiore di 1 restringe la funzione, mentre moltiplicare x per un numero minore di 1 la espande. Ad esempio, il grafico di $y = 2^{x+3}$ ha la stessa forma e orientamento del grafico di partenza visto in precedenza, ma risulta traslato di tre unità verso **sinistra**. Per intenderci, invece di passare attraverso i punti di coordinate (0,1) e (1,2), la funzione traslata passerà attraverso i punti (-3,1) e (-2,2). Il grafico della funzione $y = 2^{x-3}$, si troverà, invece, traslato di tre unità verso destra rispetto a quello di $y = 2^{x}$. Vediamo la rappresentazione, su grafico, della funzione originaria e delle sue due versioni traslate:



Se moltiplichiamo per 2 la x, all'interno della funzione $y = 2^x$, la funzione si restringe orizzontalmente di un fattore pari a 2. Per cui, ogni punto sulla nuova funzione si troverà a una distanza dall'asse y pari a metà di quella originaria. Quindi, la coordinata y di ogni punto rimarrà inalterata, mentre quella x sarà dimezzata. Ad esempio, la funzione $y = 2^x$ passa attraverso il punto (1,2), per cui la funzione $y = 2^{2x}$ passerà attraverso il punto $(\frac{1}{2},2)$; $y = 2^x$ passa attraverso il punto

$(-4, \frac{1}{16})$, per cui $y = 2^{2x}$ passerà attraverso il punto $(-2, \frac{1}{16})$. Moltiplicando x per un numero minore di 1 ha invece l'effetto opposto. Quando $y = 2^{x}$ viene trasformato in $y = 2^{\frac{1}{4}x}$, ogni punto su $y = 2^{x}$ si ritroverà allontanato rispetto all'asse y di una distanza pari a 4 volte quella a cui si trovava originariamente. Ha avuto quindi un effetto contrario rispetto a prima. L'ultima trasformazione orizzontale è la riflessione rispetto all'asse y. Moltiplicare la x, all'interno d i $y = 2^x$, per -1, riflette o ribalta letteralmente la curva rispetto all'asse y. Ad esempio, il punto (1,2) diventa (-1,2), e $(-2, \frac{1}{4})$ diventerà $(2, \frac{1}{4})$. Vediamolo graficamente:



Trasformazioni verticali.

Per trasformare verticalmente una funzione, si aggiunge o si sottrae un numero all'intera funzione oppure si moltiplica l'intera funzione per un numero. Per fare qualcosa ad una funzione intera, ad esempio diciamo che la funzione sia $y = 10^x$, immaginiamo che l'intero lato destro della funzione sia racchiuso fra parentesi: $y = (10^x)$. Ora, tutte le trasformazioni verticali vengono fatte piazzando un numero sul lato destro dell'equazione, in qualsiasi punto va bene, purchè si trovi al di fuori delle parentesi. A differenza delle trasformazioni orizzontali, quelle verticali funzionano esattamente come ci si aspetterebbe funzionino. Aggiungere qualcosa fa in modo che la funzione salga su, sottrarre fa in modo che vada invece giù. Ulteriormente, moltiplicare per un numero maggiore di 1 allunga la funzione, mentre moltiplicare per un numero minore di 1 la accorcia. Ad esempio, consideriamo le seguenti trasformazioni della funzione $y = 10^x$:

1) $y = 10^x + 6$ trasla la funzione originaria di 6 unità verso l'alto.

2) $y = 10^x - 2$ trasla la funzione originaria di 2 unità verso il basso

3) $y = 5 * 10^x$ allunga verticalmente la funzione originaria di un fattore pari a 5.

4) $y = \frac{1}{3} * 10^x$ accorcia la funzione verticalmente di un fattore pari a 3

Moltiplicare la funzione per -1, sortisce il risultato di rifletterla lungo l'asse x o, in altre parole , la capovolge dall'alto verso il basso. Da provare con la vostra super potente calcolatrice grafica!

Come visto in precedenza, le trasformazioni orizzontali cambiano soltanto le coordinate x dei punti, lasciando inalterate quelle y. Viceversa, le trasformazioni verticali cambiano soltanto le coordinate y dei punti, lasciando inalterate quelle x. Tutto qui. Non c'è altro da sapere a riguardo!