Giovanni Liveri

La Matematica per la Fisica quantistica

La Matematica per la Fisica Quantistica

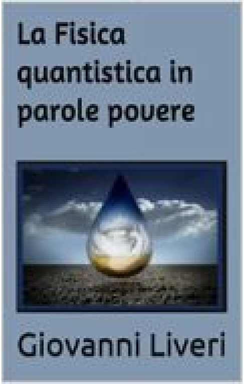
Giovanni Liveri

La Matematica per la Fisica Quantistica.

I edizione digitale © 2017

E mail: giovanniliveri@libero.it

Brevi lezioni di Fisica Quantistica


La Fisica quantistica in parole povere
Giovanni Liveri

Sommario

La Matematica per la Fisica Quantistica
Brevi lezioni di Fisica Quantistica
Introduzione
Come creare i vettori nello spazio di Hilbert.
Rendiamo tutto quanto più semplice: la notazione di Dirac.
I kets come abbreviazione dei vettori di stato.
Passiamo al bra: scriviamo il coniugato ermitiano.
Moltiplichiamo bra e ket per ottenere la probabilità 1.
Bra e ket : i nostri amabili vettori di stato senza basi!
Alcune interessanti relazioni!
Gli operatori.
Che cosa ci aspettiamo? Come determinare i valori attesi.
Come trovare il Commutatore.
Gli operatori anti-Ermitiani.
Operatori a lavoro. Andiamo verso il principio di Heisenberg.

Introduzione

La Fisica quantistica non è una materia per eletti, non è un qualcosa di strano che preveda di maneggiare fantasmagorici acceleratori di particelle mentre si cerchi, al contempo, di non distruggere l'universo. Perlomeno, non è soltanto questo. A volte, infatti, essa prevede di aver a che fare con qualcosa di più semplice, di più "mondano", come accendere o spegnere la luce, come applicare un po' di calcolo matematico, come giocare a dadi. Proprio così, avete capito bene. Giocare a dadi. Saper giocare a dadi è forse la dote principale di cui, chiunque volesse studiare la fisica quantistica, dovrebbe essere dotato. E, qualora si facesse, sul serio, la fisica con i suddetti dadi, vi assicuro che ogni eventuale direttore di laboratorio avrebbe poco di cui lamentarsi riguardo al vostro operato. Ebbene, in fisica quantistica le misure assolute vengono rimpiazzate dalle probabilità. Per cui, è possibile utilizzare i nostri amati dadi per calcolare le probabilità che vengano fuori determinati numeri. Sarà poi possibile mettere assieme tali valori all'interno di un vettore(che è essenzialmente una matrice dotata di una singola colonna) all'interno dello spazio di Hilbert(uno spazio vettoriale con infinite dimensioni dotato di alcune proprietà utili specialmente in fisica quantistica). E questo è quello che cercheremo di fare, nel prosieguo delle pagine, partendo ovviamente dal cercare di imparare a maneggiare le probabilità all'interno della fisica quantistica. Vedendo, come prima cosa, i vari possibili stati che una particella possa occupare come un vettore – un vettore della probabilità degli stati. Da qui, cercheremo di familiarizzare con alcune notazioni matematiche comuni in fisica quantistica come i "bra", i "ket", le matrici e le funzioni d'onda. E, in mezzo alla via, incontreremo anche alcuni operatori con cui impareremo a collaborare, fianco a fianco, gomito a gomito. Ma allora, cosa stiamo aspettando? Direi che è giunto il momento di cominciare a fare sul serio. Buona lettura e buon divertimento!

Come creare i vettori nello spazio di Hilbert.

Abbiamo già detto che, in fisica quantistica, le probabilità prendono il posto delle misure assolute. E questo dovrebbe essere chiaro. Ipotizziamo di stare eseguendo degli esperimenti che prevedano di far rotolare un paio di dadi e di cercare di capire quale sia la probabilità relativa che i dadi mostrino ciascun valore reale. Alla fine, arriveremo ad avere una lista indicante la probabilità relativa di ottenere 2, 3, 4, e così via, fino, ovviamente, ad arrivare a 12. In parole povere, a noi interessa conoscere tutti quanti i modi in cui sia possibile ottenere un particolare totale. Per intenderci, una cosa del genere:

2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

Vale a dire, ad esempio, che è due volte più probabile ottenere, lanciando i due dadi, un 3 in totale rispetto ad un 2, ed è quattro volte più probabile ottenere un 5 rispetto ad un 2. Insomma, avete capito. È possibile impilare tutte quante queste probabilità relative all'interno di un vettore(quando parlo di vettore pensate soltanto a una colonna di componenti e non a una direzione e ad un' ampiezza) per tenerne traccia in maniera più immediata:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Okay, siamo molto vicini al modo in cui lavora la fisica quantistica. Abbiamo il vettore delle probabilità che i dadi occupino i vari stati. Tuttavia, non ci basta come informazione, perché la fisica quantistica non tratta direttamente con le probabilità, come fosse qualcosa di troppo volgare, bensì con le **ampiezze di probabilità**, che non sono altro che le radici quadrate delle probabilità. Quindi , per intenderci, per determinare la reale probabilità che una particella si trovi in un certo stato, bisognerà sommare le funzioni d'onda – che in qualche maniera sono rappresentate da tali vettori di cui si parlava in precedenza – e poi elevarle al quadrato. Per cui , come primo passo, facciamo la radice quadrata di tutti quanti tali valori per ottenere le ampiezze di probabilità:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{4} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{4} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{1} \end{bmatrix}$$

Molto meglio, ma non è ancora sufficiente. Infatti, sappiamo che sommando i quadrati di tutti quanti tali ultimi valori (ovvero le probabilità relative) si dovrebbe ottenere 1(la somma di tutte le possibili probabilità relative è ovviamente la certezza). E , così come ci troviamo adesso, la somma dei quadrati di tali numeri ci fornisce 36. Quindi, ciascuna entità di partenza per $36^{1/2}$, ovvero 6. Otterremo :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1/36} \\ \sqrt{2/36} \\ \sqrt{3/36} \\ \sqrt{4/36} \\ \sqrt{5/36} \\ \sqrt{6/36} \\ \sqrt{5/36} \\ \sqrt{4/36} \\ \sqrt{3/36} \\ \sqrt{2/36} \\ \sqrt{1/36} \end{bmatrix}$$

Adesso siamo in grado di dire quale sia l'ampiezza di probabilità relativa al far rotolare qualsiasi combinazione da 2 a 12, soltanto leggendo le varie righe dell'ultimo vettore ottenuto. Per intenderci, l'ampiezza di probabilità di ottenere un 2 è pari a 1/6, mentre di far rotolare un 3 è pari a $\frac{\sqrt{2}}{6}$. Alla fine siamo arrivati alla nostra cara ampiezza di probabilità. Con un po' di passaggi intermedi ma ci siamo arrivati!

Rendiamo tutto quanto più semplice: la notazione di Dirac.

Quando abbiamo un vettore di stato che ci fornisce l'ampiezza di probabilità che una coppia di dadi si trovi in uno dei loro possibili stati, praticamente parlando disponiamo di un vettore **nello spazio dei dadi** (ovvero tutti i possibili stati che una coppia di dadi può assumere, il che si traduce in uno spazio 11-dimensionale). Se questo vi sembra già un tantino strano oppure bizzarro oppure complicato, pensate che, nella maggior parte dei problemi di fisica quantistica, i vettori che si incontrano possono essere infinitamente grandi – ad esempio, una particella in movimento può trovarsi in un numero infinito di stati differenti. E, come è intuitivo immaginare, gestire degli array di stati talmente enormi, non è cosa facile utilizzando la notazione vettoriale. Per cui, invece di scrivere per esteso ed esplicitamente, ogni volta, l'intero vettore, in fisica quantistica di solito si utilizza la notazione introdotta e sviluppata dal fisico Paul Dirac: **la notazione di Dirac** oppure **notazione bra-ket.**

I kets come abbreviazione dei vettori di stato.

Seguendo la notazione di Dirac, un intero vettore di stato viene abbreviato e fatto diventare un ket. Qualcosa del tipo:

$$|\psi >$$

Quindi, calandoci nel nostro esempio dei dadi, è possibile scrivere il vettore di stato come un ket del tipo:

$$
|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ 2/6 \\ \sqrt{5}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{5}/6 \\ 2/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}
$$

In questo caso particolare, tutti i componenti del vettore di stato sono rappresentati da numeri appartenenti allo spazio 11-dimensionale dei dadi.

Molto più comunemente, tuttavia, ciascun componente rappresenterà una funzione della posizione e del tempo. Qualcosa del genere, per intenderci:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1/6 \cdot e^{i(kx-\omega t)} \\ \sqrt{2}/6 \cdot e^{2i(kx-\omega t)} \\ \sqrt{3}/6 \cdot e^{3i(kx-\omega t)} \\ 2/6 \cdot e^{4i(kx-\omega t)} \\ \sqrt{5}/6 \cdot e^{5i(kx-\omega t)} \\ \sqrt{6}/6 \cdot e^{6i(kx-\omega t)} \\ \sqrt{5}/6 \cdot e^{7i(kx-\omega t)} \\ 2/6 \cdot e^{8i(kx-\omega t)} \\ \sqrt{3}/6 \cdot e^{9i(kx-\omega t)} \\ \sqrt{2}/6 \cdot e^{10i(kx-\omega t)} \\ 1/6 \cdot e^{11i(kx-\omega t)} \end{bmatrix}$$

Passiamo al bra: scriviamo il coniugato ermitiano.

Sappiate subito che per ogni **ket** esiste sempre un corrispondente **bra**(i due termini derivano da bra-ket, ovvero braket). Un bra è il coniugato ermitiano del corrispondente ket. Facciamo subito un esempio per intenderci. Supponiamo di partire con il seguente ket:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ 2/6 \\ \sqrt{5}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{5}/6 \\ 2/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Ricordiamo, per quanti non lo sapessero o lo avessero dimenticato, che in matematica il simbolo "*" sta ad indicare il **complesso coniugato**(che non fa altro che invertire il segno che collega la parte reale e immaginaria di un numero complesso). Avendo puntualizzato ciò, diremo subito che, il bra corrispondente al ket appena visto e che scriveremo come di seguito:

$$<\psi|$$

è uguale a:

$$|\psi>^{T^*}$$

Ovvero il complesso coniugato del trasposto del ket. Vi sembra estremamente difficile tutto questo? Vi sbagliate! Tornando al nostro ket di partenza, ad esempio, il bra corrispondente sarà pari al seguente vettore riga:

$$\langle\psi| = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{6} & \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{2}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Chiaramente, si tratta di un esempio semplice, in cui tutti gli elementi del ket di partenza sono reali. Nel caso qualche elemento del ket di partenza fosse stato un numero complesso, avremmo dovuto prendere il rispettivo complesso coniugato nel momento di creare il corrispondente bra. Per capirci, se il numero complesso all'interno del ket fosse stato a+ib, il complesso coniugato corrispondente all'interno del bra sarebbe stato a-ib. Adesso dovrebbe essere tutto più chiaro. Almeno spero!

Moltiplichiamo bra e ket per ottenere la probabilità 1.

Ovviamente, è possibile moltiplicare, fra loro, bra e ket, qualcosa denotato dal seguente simbolo:

$$<\psi|\psi>$$

Il tutto sarà pari a:

$$\langle\psi|\psi\rangle=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{6} & \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{2}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/6\\ \sqrt{2}/6\\ \sqrt{3}/6\\ 2/6\\ \sqrt{5}/6\\ \sqrt{6}/6\\ \sqrt{5}/6\\ 2/6\\ \sqrt{3}/6\\ \sqrt{2}/6\\ 1/6\end{bmatrix}$$

Che non è altro che una semplice moltiplicazione fra matrici, il cui risultato è pari alla somma dei quadrati di ciascun elemento:

$$<\psi|\psi> = \frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36} = 1$$

E il risultato è proprio quello che deve essere, dato che sommando le varie probabilità relative bisogna sempre giungere ad una probabilità totale pari a 1. Per cui, in generale, il prodotto fra bra e ket è pari a 1:

$$<\psi|\psi> = 1$$

Qualora valga tale ultima relazione, allora il ket $|\psi>$ è detto essere **normalizzato**.

Bra e ket : i nostri amabili vettori di stato senza basi!

La ragione per cui la notazione ket è così popolare in fisica quantistica risiede nel fatto che essa consente di lavorare con dei vettori di stato in maniera svincolata dalle basi. In altre parole, non siamo vincolati alla base relativa alla posizione, a quella relativa al momento e a quella relativa all'energia. Il che è estremamente vantaggioso, dal momento che la stragrande parte del lavoro in fisica quantistica consiste in calcoli astratti e, chiaramente, l'auspicio sarebbe quello di non essere costretti a trascinarsi dietro tutti quanti i componenti dei vettori di stato attraverso tali laboriosi calcoli(considerate che a volte è praticamente impossibile farlo, dal momento che potrebbero esserci infiniti possibili stati nel problema che si stia trattando). Ad esempio, immaginiamo di voler rappresentare i nostri stati utilizzando i vettori di posizione in uno spazio di Hilbert tridimensionale – ovvero abbiamo gli assi x,y e z che formano una base di posizione per il nostro spazio. Ciò è ottimo ma non tutti i calcoli devono essere fatti per forza utilizzando tale base di posizione.

Potremmo voler rappresentare, ad esempio, i nostri stati in uno spazio tridimensionale di momento, con i tre assi px,py,pz nello spazio di Hilbert. A questo punto, dovremmo cambiare tutti quanti i vettori di posizione in vettori di momento, modificando o aggiustando ciascun componente e tenendo traccia di ciò che accada a ciascun componente passando attraverso i vari calcoli. È qui che la notazione bra-ket di Dirac ci viene in soccorso. La utilizzeremo per eseguire tutta la matematica e alla fine inseriremo i vari componenti dei vari vettori di stato come richiesto. Vale a dire, sarà possibile eseguire tutti quanti i calcoli in termini puramente simbolici, senza il bisogno di essere legati ad una particolare base. E quando ci sarà bisogno di utilizzare i componenti di un ket, come ad esempio quando si voglia ottenere delle risposte fisiche, è possibile convertire i ket in una base differente, semplicemente prendendo i componenti del ket lungo gli assi di tale base. Generalmente, quando abbiamo un vettore $|\psi>$, è possibile esprimerlo come somma di N vettori di base $|i\rangle$. Qualcosa del genere:

$$|\psi>=\sum_{i=1}^{N}|\phi_i><\phi_i|\psi>$$

dove N è la dimensione dello spazio di Hilbert e i è un indice che etichetta il vettore di base. Tutto qui!

Alcune interessanti relazioni!

La notazione ket rende la matematica più semplice rispetto alla forma matriciale dal momento che è possibile avvantaggiarsi di alcune interessanti relazioni matematiche. Ad esempio, di seguito riportiamo la cosiddetta disuguaglianza di Schwarz per i vettori di stato:

$$\left| < \psi | \phi > \right|^2 \leq < \psi | \psi > < \phi | \phi >$$

In parole povere, tale relazione afferma che il quadrato del valore assoluto del prodotto fra due vettori di stato

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

è minore o uguale a:

$$\langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle$$

Il che risulta essere analogo alla disuguaglianza vettoriale:

$$|A \cdot B|^2 \leq |A|^2|B|^2$$

Okay, bella, ma a cosa serve e perché è così utile? Scopriremo, nelle pagine a venire, come, a partire da essa, sia possibile ottenere il principio di indeterminazione di Heisenberg. Quindi, direi che vale proprio la pena conoscerla!

Esistono altre relazioni fra ket che possono semplificare notevolmente i calcoli. Ad esempio, due ket ($|\psi >$ □ e |□ > □) si dicono essere **ortogonali** se:

$$<\psi|\phi>=0$$

Inoltre, due ket si dicono essere **ortonormali** se valgono contemporaneamente le seguenti condizioni:

- $<\psi|\phi>=0$
- $<\psi|\psi>=1$
- $<\phi|\phi>=1$

Con queste poche informazioni ben stampate in mente, siamo ora pronti per cominciare a lavorare con gli operatori.

Vi starete chiedendo cosa siano. Lo scoprirete fra pochissimo!

Gli operatori.

Cosa ne pensate di tutti i calcoli che abbiamo sinora supposto di essere in grado di eseguire utilizzando i ket? È vero che eseguire, ad esempio, il prodotto

$$<\psi|\phi>$$

è molto carino fintanto che rimanga fine a se stesso. Ma cosa accade quando si abbia bisogno di estrarre alcune quantità fisiche che possiamo misurare? È finalmente arrivato il momento di parlare di operatori! Partiamo da un definizione generale di un operatore A in fisica quantistica: un **operatore** è una regola matematica che, quando applicata a un ket, $|\psi>$, trasforma il medesimo ket in un nuovo ket $|\psi'>$ nello stesso spazio. Per cui quando avremo un operatore A, esso trasformerà il ket di partenza in qualcosa del genere:

$$A|\psi>=|\psi'>$$

Ovviamente, il medesimo operatore può anche trasformare i bra:

$$<\psi|A=<\psi'|$$

Ma vediamo subito alcuni esempi di operatori che ci capiterà di incontrare:

1) **Operatore Hamiltoniano(H)**: applicare l'operatore hamiltoniano(che apparirà differente

per ogni differente situazione fisica) ci fornisce E, ovvero l'energia della particella rappresentata dal ket $|\psi>$. E è una quantità scalare:

$$H|\psi>=E|\psi>$$

2) Operatore unità o identità(I): l'operatore unità o identità lascia inalterati i ket cui si applica:

$$I|\psi>=|\psi>$$

3) Operatore Gradiente( ): l'operatore gradiente opera nel modo seguente:

$$\nabla|\psi>=\frac{\partial}{\partial x}|\psi>\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}|\psi>\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}|\psi>\boldsymbol{k}$$

4) Operatore momento lineare(P):

l’operatore momento lineare funziona nel modo seguente in meccanica quantistica:

$$\mathrm{P}|\psi> = -i\hbar\nabla|\psi>$$

5) Operatore Laplaciano(∇^2): l’operatore Laplaciano, che è molto simile ad un gradiente del secondo ordine, viene utilizzato per creare l’operatore Hamiltoniano che serve per determinare l’energia:

$$\nabla^2|\psi\rangle = \nabla\cdot\nabla|\psi\rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}|\psi\rangle + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|\psi\rangle + \frac{\partial^2}{\partial z^2}|\psi\rangle$$

Ricordate sempre che, in generale, moltiplicare gli operatori fra di loro non è indipendente dall’ordine utilizzato per farlo. Vale a dire, dati i due operatori A e B, vale la relazione:

$$AB \neq BA$$

Inoltre, un operatore A è detto lineare, se vale la seguente relazione:

$$A\left(c_1\left|\psi>+c_2\right|\psi>\right)=c_1 A\left|\psi>+c_2 A\right|\psi>$$

Che cosa ci aspettiamo? Come determinare i valori attesi.

Partendo dal presupposto che ogni cosa in fisica quantistica è fatta in termini di probabilità, essere in grado di fare previsioni diventa estremamente importante. E la più grande di tali previsioni è senza dubbio il valore atteso. Il **valore atteso** di un operatore è il valore medio di ciò che misureremmo se eseguissimo molte volte una stessa misurazione. Ad esempio, il valore atteso dell'operatore Hamiltoniano non è altro che l'energia media del sistema che si sta studiando. Badate bene, il valore atteso è una media pesata delle probabilità dello stato del sistema nei suoi vari stati possibili. Non si è capito nulla? Vediamo subito come si calcola il valore atteso di un operatore A:

$$\text{Valore atteso} = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

Dal momento che è possibile esprimere $\langle \psi |$ come un operatore riga e $| \psi \rangle$ come uno colonna, è possibile alla fine esprimere l'operatore A come una matrice quadrata. Ad esempio, ipotizziamo di voler lavorare con una coppia di dadi e le probabilità di tutte le possibili somme ottenibili. In tale esempio, il valore atteso è una somma di termini, e ciascun termine è un valore che può venire fuori dai dadi, moltiplicato per la probabilità che tale valore appaia. Abbiamo visto come i bra e i ket gestiscano le probabilità, per cui è compito dell'operatore che andremo a creare per tale situazione(che chiameremo R) immagazzinare i valori dei dadi(da 2 a 12) per ciascuna probabilità. Per cui l'operatore dovrà apparire così:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Per determinare il valore atteso di R, dovremo quindi calcolare

$$<\psi|R|\psi>$$

Il che, parlando in termini di componenti, vorrà dire:

$$\langle\psi|R|\psi\rangle=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{6} & \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{2}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&5&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&6&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&10&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&11&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/6\\\sqrt{2}/6\\\sqrt{3}/6\\2/6\\\sqrt{5}/6\\\sqrt{6}/6\\\sqrt{5}/6\\2/6\\\sqrt{3}/6\\\sqrt{2}/6\\1/6\end{bmatrix}$$

Che con un po' di matematica diventa:

$$<\psi|R|\psi>=7$$

Per cui, il valore atteso per un lancio di dadi è pari a 7. Soltanto adesso riusciamo a capire da dove derivi l'utilizzo dei termini bra e ket. Essi, infatti, racchiudono fra parentesi(braket in inglese) un operatore per fornirci i valori attesi. Di fatto, il valore atteso è una cosa talmente comune da determinare che, molto spesso, capiterà di incontrare

$$<\psi|R|\psi>$$

abbreviato in

$$<R>$$

Per cui, nel nostro esempio precedente, avremmo anche potuto scrivere:

$$<R> = 7$$

Come trovare il Commutatore.

La misura di quanto sia differente applicare l'operatore A e poi quello B, rispetto ad applicare prima l'operatore B e poi quello A, viene definito **commutatore** degli operatori. Di seguito la definizione di commutatore:

$$[A, B] = AB - BA$$

Due operatori commutano l'uno con l'altro se il loro commutatore è pari a zero. Vale a dire, non è importante in quale ordine li si applichi. Ovvero:

$$[A, B] = 0$$

In particolare, notiamo come un operatore commuta con se stesso. Ovvero:

$$[A, A] = 0$$

Ed è altrettanto semplice dimostrare che il commutatore di A,B è il negativo del commutatore B,A. Ovvero:

$$[A, B] = -[B, A]$$

È altresì vero che i commutatori sono lineari. Ovvero:

$$[A, B + C + D + \dots] = [A, B] + [A, C] + [A, D] + \dots$$

Altra cosa ancora, l'Ermitiano aggiunto di un commutatore funziona nel modo seguente:

$$[A, B]^{\dagger} = [B^{\dagger}, A^{\dagger}]$$

E, infine, è anche possibile trovare l'anticommutatore, $\{A,B\}$:

$$\{A, B\} = AB + BA$$

Gli operatori anti-Ermitiani.

Vi faccio una domanda: cosa possiamo dire riguardo all'Ermitiano aggiunto del commutatore di due operatori Ermitiani? Non si è capito nulla? Tranquilli, ecco la risposta:

Per prima cosa scriviamo l'aggiunto:

$$[A, B]^\dagger$$

Ricordiamo che la definizione di aggiunto ci dice che:

$$[A, B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger$$

In un paragrafo precedente abbiamo

appreso che:

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$$

Per cui:

$$[A, B]^{\dagger} = (AB - BA)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} - A^{\dagger}B^{\dagger}$$

Ma, per gli operatori Ermitiani, vale la seguente relazione:

$$A = A^{\dagger}$$

Per cui possiamo rimuovere i simboli (un tantino tetri) di aggiunto:

$$[A, B]^{\dagger} = (AB - BA)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} - A^{\dagger}B^{\dagger} = BA - AB$$

Ma , BA-AB, non è altro che -[A,B], per cui avremo:

$$[A, B]^{\dagger} = -[A, B]$$

Morale della favola: A e B sono degli operatori Ermitiani. Se prendiamo l'aggiunto Ermitiano di un'espressione e otteniamo la stessa espressione ma con un segno negativo davanti, sempre la stessa espressione è detta essere anti-Ermitiana. Per cui , il commutatore di due operatori Ermitiani è anti-Ermitiano.

Operatori a lavoro. Andiamo verso il principio di Heisenberg.

Finora ci siamo armati di nuova tecnologia: operatori Ermitiani e commutatori. Ma a cosa servono? Ve lo dico subito. Sappiate che è possibile giungere al principio di indeterminazione di Heisenberg praticamente partendo dalle briciole. Vediamo un insieme di calcoli che ci porterà a tale relazione. Calcoli che ci mostreranno come sia molto più semplice utilizzare la notazione bra e ket rispetto alla versione matriciale dei vettori di stato. Ovviamente, per eseguire tali calcoli è vitale saper utilizzare bra, ket, commutatori e operatori Ermitiani. Partiamo!

L'incertezza nella misura di un operatore Ermitiano A è formalmente data da:

$$\Delta A = \left(< A^2 > - < A >^2 \right)^{1/2}$$

Vale a dire, ΔA è pari alla radice quadrata del valore atteso di A^2 meno il quadrato del valore atteso di A. Se avete studiato statistica, probabilmente tale formula vi sarà familiare. Altrimenti prendetela per buona. Similmente, l'incertezza nella misura utilizzando un operatore Ermitiano B, è pari a:

$$\Delta B = \left(< B^2 > - < B >^2 \right)^{1/2}$$

Adesso, consideriamo gli operatori ΔA e ΔB(badate bene non sto parlando delle incertezze) e assumiamo che applicare i due operatori ci fornisca valori di misurazione simili ai seguenti:

$$\Delta A = A - < A >$$

$$\Delta B = B - < B >$$

Come funziona per ogni operatore, utilizzare ΔA e ΔB può dare come risultato nuovi ket:

$$\Delta A|\psi>=|\chi>$$

$$\Delta B|\psi>=|\phi>$$

Ed ecco a voi la chiave di volta: la disuguaglianza di Schwarz(ricordate, l'abbiamo vista in precedenza) ci fornirà il seguente risultato:

$$<\chi|\chi><\phi|\phi>\geq|<\chi|\phi>|^2$$

Come potete ben notare, il simbolo di disuguaglianza, $\geq$, il quale gioca un ruolo cruciale nella relazione di indeterminazione di Heisenberg, è già apparso nel nostri complicati calcoli. Il che non è già male! Ora, dal momento che ΔA e ΔB sono Ermitiani avremo che:

$$<\chi|\chi> = <\psi|\Delta A^2|\psi>$$

$$<\phi|\phi> = <\psi|\Delta B^2|\psi>.$$

Inoltre

$$\Delta A^\dagger = \Delta A$$

ovvero, la definizione di un operatore Ermitiano.

Per cui, avremo:

$$<\chi|\chi>=<\psi|\Delta A^\dagger \Delta A|\psi>$$

Il che significa:

$$<\chi|\chi>=<\psi|\Delta A^\dagger \Delta A|\psi>=<\psi|\Delta A^2|\psi>$$

Vale a dire che:

$$<\chi|\chi> \quad = \quad <\Delta A^2>$$

$$<\phi|\phi> \quad = \quad <\Delta B^2>$$

Per cui è possibile riscrivere la disuguaglianza di Schwarz nel modo seguente:

$$<\Delta A^2><\Delta B^2> \geq \left|<\Delta A \Delta B>\right|^2$$

Okay, ma tutto questo dove ci ha condotti di bello? Di familiare riusciamo a riconoscere soltanto il simbolo di disuguaglianza, per il momento. Cerchiamo di andare aldilà e di essere arguti. Notiamo che è possibile scrivere $\Delta A \, \Delta B$ come:

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2}\left[\Delta A, \Delta B\right] + \frac{1}{2}\left\{\Delta A, \Delta B\right\}$$

In particolare:

$$\{\Delta A, \Delta B\} = \Delta A \Delta B + \Delta B \Delta A \longrightarrow \text{Anticommutatore degli operatori } \Delta A \text{ e } \Delta B$$

Dal momento che :

$$[\Delta A, \Delta B] = [A, B]$$

È possibile riscrivere l'equazione precedente nel seguente modo:

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2}\left[A, B\right] + \frac{1}{2}\left\{\Delta A, \Delta B\right\}$$

Bene, dove siamo arrivati finora? Non avete capito nulla con tutta quanta questa matematica? Tranquilli, riassumeremo subito i risultati cruciali:

1) Il commutatore di due operatori Ermitiani, [A,B] , è anti- Ermitiano
2) Il valore atteso di un anti-Ermitiano è immaginario
3) $\{\Delta A, \Delta B\}$ è Ermitiano
4) Il valore atteso di un Ermitiano è reale

Tutto ciò significa che è possibile vedere il valore atteso dell'equazione di cui sopra come la somma di una parte reale, $\{\Delta A, \Delta B\}$, e di una immaginaria, [A,B]. Per cui:

$$\left|<\Delta A \Delta B>\right|^2 = \frac{1}{4}\left|<\left[A, B\right]>\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\left\{\Delta A, \Delta B\right\}\right|^2$$

E dal momento che il secondo termine sul lato destro dell'equazione è sempre positivo oppure nullo è possibile affermare con certezza che:

$$\left|<\Delta A \Delta B>\right|^2 \geq \frac{1}{4}\left|<[A, B]>\right|^2$$

Ci stiamo avvicinando. Adesso raffrontiamo tale equazione con quella ottenuta precedentemente utilizzando la disuguaglianza di Schwarz:

$$<\Delta A^2><\Delta B^2> \geq \left|<\Delta A \Delta B>\right|^2$$

Combinando le due equazioni otterremo:

$$<\Delta A^2><\Delta B^2> \geq \frac{1}{4}\left|<[A, B]>\right|^2$$

E questa sì che ha il look della relazione di indeterminazione di Heisenberg! Ovviamente, bisogna ancora fare eccezione per le parentesi di valore atteso(<>) e per il fatto che ΔA e ΔB appaiano al quadrato in tale equazione. Poco importa, tanto noi vogliamo riprodurre la relazione di Heisenberg così come si conosce usualmente:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Okay. La prima cosa da fare è capire come passare, nel lato sinistro dell'equazione, da

$$<\Delta A^2><\Delta B^2>$$

a

$$\Delta A \Delta B$$

Dal momento che una precedente equazione ci diceva che:

$$\Delta A = A - <A>$$

sappiamo allora che:

$$<\Delta A^2> = <A^2 + <A>^2 - 2A<A>>$$

Prendendo il valore atteso dell'ultimo termine della precedente equazione avremo:

$$<\Delta A^2> = <A^2 + <A>^2 - 2A<A>> = <A^2> - <A>^2$$

Eleviamo al quadrato la precedente relazione

$$\Delta A = (<A^2> - <A>^2)^{1/2}$$

per ottenere:

$$\Delta A^2 = <A^2> - <A>^2$$

E, comparando la precedente equazione con quella ancora precedente, potremo concludere che:

$$< \Delta A^2 > = \Delta A^2$$

Molto Cool. Tale risultato significa che l'equazione

$$< \Delta A^2 > < \Delta B^2 > \geq \frac{1}{4} \left| < [A, B] > \right|^2$$

diventa:

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \frac{1}{4} \left| < [A, B] > \right|^2$$

Relazione che alla fine dei conti equivale a dire:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| < [A, B] > \right|$$

Bene, bene, bene. Quindi, in definitiva, il prodotto fra due indeterminazioni è maggiore o uguale a ½ del valore assoluto del commutatore dei rispettivi operatori? Sarebbe fantastico. Si tratta, per caso, del principio di indeterminazione di Heisenberg? Diamo un'occhiata. In meccanica quantistica l'operatore momento compare nelle seguenti vesti:

$$P = -i\hbar\nabla$$

L'operatore per il momento nella direzione x, invece, è pari a:

$$P_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

Per cui il problema è capire a cosa sia uguale il commutatore di un operatore X(che dà come risultato essenzialmente la posizione x di una particella) e Px. Viene fuori, matematicamente, quanto segue:

$$[X, Px] = i\hbar$$

Perciò, partendo dalla relazione ottenuta in precedenza:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|<[A, B]>\right|$$

otterremo la seguente equazione (badate bene che Δx e Δpx sono le incertezze nella posizione x e nel momento lungo la direzione x, px, non gli operatori):

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Bingo! Abbiamo ottenuto la relazione di indeterminazione di Heisenberg. Badate bene, quello che abbiamo appena ottenuto non significa aver ricevuto certezze, riguardo al mondo fisico, utilizzando la mera astrazione matematica. Quello che abbiamo provato, in verità, è soltanto che, utilizzando poche assunzioni di base, NON è possibile misurare il mondo fisico con un'accuratezza perfetta.